







وزارة المعارف العمومية

# كتاب الهندسة للأستاذ الشاذلي

الأجزاء الثلاثة الأولى

تأليف هـ. و. واستيفنز

وفيه بعض التعديل بما يلائم حالة المدارس المصرية

عربه بأمر وزارة المعارف العمومية

محمد أسعد براده

مساعد مفتش بوزارة المعارف العمومية

(سوق الطبع محفظة الوزارة)

الطبعة الخامسة

بالمطبعة الأميرية بالقاهرة

١٩٢٥



# محتويات الكتاب

## الجزء الأول

صفحة

٣	البداهات
٤	التعاريف والمبادئ الأولية
٧	العمليات المسلم بصحة فرضها
٨	الانطباق والتساوى
٨	القضايا المسلم بصحتها
٩	تمهيد
٩	الرموز

## في الخطوط والزوايا

- ١٠ نظرية ١ — مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر وفي جهة واحدة منه يساوى زاويتين قائمتين
- ١١ نتيجة ١ — اذا تقاطع مستقيمان فمجموع الزوايا الأربع الحادثة من تقاطعهما يساوى أربع قوائم
- ١١ » ٢ — اذا مدت عدة مستقيمتين من نقطة واحدة فمجموع الزوايا الحادثة المأخوذة واحدة بعد الاخرى يساوى أربع قوائم
- ١١ » ٣ — (أولا) مكلات الزاوية الواحدة متساوية
- (ثانيا) متمات الزاوية الواحدة متساوية
- ١٢ نظرية ٢ — اذا كان مجموع أى زاويتين متجاورتين مساويا قائمتين كان ضلعاها المتطرفان على استقامة واحدة
- ١٤ » ٣ — اذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان

## في المثلثات

- ١٦ تعاريف
- ١٨ المقارنة بين مثلثين
- ١٩ نظرية ٤ — ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا مساوى فى كل ضلعان والزاوية المحصورة بينهما نظائريا فى الآخر
- ٢٢ » ٥ — زاويتا قاعدة المثلث المتساوى الساقين متساويتان
- ٢٣ نتيجة ١ — اذا مد كل من سبقي المثلث المتساوى الساقين على استقامته من جهة القاعدة فان كلا من الزاويتين الخارجيتين تكون مساوية للآخرى
- ٢٣ » ٢ — اذا كان المثلث متساوى الأضلاع فانه يكون متساوى الزوايا ايضا

صفحة

- ٢٤ نظرية ٦ — اذا تساوى في المثلث زاويتان فان الضلعين المقابلين لهما يكونان متساويين
- ٢٦ » ٧ — ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى كل ضلع من أحدهما نظيره من الآخر
- ٣١ » ٨ — اذا مد أحد أضلاع المثلث على استقامته كانت الزاوية الخارجة الحادثة أكبر من أى زاوية داخلية ماعدا المجاورة لها
- ٣٢ نتيجة ١ — مجموع أى زاويتين في المثلث أصغر من قائمتين
- ٣٢ » ٢ — يجب أن يكون في كل مثلث من الزوايا الحادة اثنتان على الأقل
- ٣٢ » ٣ — لا يمكن أن يقل من نقطة خارج مستقيم الاعمود واحد عليه
- ٣٣ نظرية ٩ — الضلع الاكبر في أى مثلث تقابله الزاوية الكبرى
- ٣٤ » ١٠ — الزاوية الكبرى في أى مثلث يقابلها الضلع الأكبر
- ٣٥ » ١١ — أى ضلع في المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين
- ٣٦ » ١٢ — العمود هو أقصر المستقيمت التي تخرج من نقطة مفروضة الى مستقيم معلوم
- ٣٦ نتيجة ١ — اذا كان م > أقصر المستقيمت الخارجة من م الى ا ب فان م > هو العمود النازل من م على ا ب
- ٣٦ » ٢ — المائلان م س ٦ ص متساويان اذا لاقيا المستقيم المعلوم على بعدين متساويين من موقع العمود
- ٣٧ » ٣ — أى مائلين يخرجان من النقطة المفروضة ويلقيان المستقيم المعلوم على بعدين مختلفين من موقع العمود يكونان مختلفين وأكبرهما ما لاقى المستقيم على بعد أكبر من الموقع المذكور

## في المتوازيات

٣٩ بديهية بلاغية

- ٤٠ نظرية ١٣ — اذا قطع مستقيم مستقيمين وحدت من ذلك (أولا) أن أى زاويتين متبادلتين متساويتان أو (ثانيا) أن أى زاويتين متناظرتين متساويتان أو (ثالثا) أن مجموع أى زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين كان المستقيمان في أى حالة من الأحوال الثلاثة متوازيين
- ٤٢ نظرية ١٤ — اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين يحدث (أولا) أن كل زاويتين متبادلتين متساويتان (ثانيا) أن كل زاويتين متناظرتين متساويتان (ثالثا) أن مجموع كل زاويتين داخليتين في جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين
- ٤٣ ايضاح المتوازيات بطريقة الدوران. فرض عملي
- ٤٤ نظرية ١٥ — المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان



صفحة	المثلثات (تابع)
٤٦	نظرية ١٦ — مجموع زوايا المثلث الداخلة يساوى زاويتين قائمتين
٤٨	نتيجة ١ — مجموع الزوايا الداخلة لأي شكل كثير الأضلاع مضافا إليه أربع قوائم يساوى من القوائم بقدر ضعف عدد الأضلاع
٥٠	نتيجة ٢ — في أي مضلع محدب اذا مده كل ضلع من أضلاعه على استقامته من جهة واحدة في ترتيب واحد كان مجموع الزوايا الخارجة الحادثة يساوى أربع قوائم
٥٣	نظرية ١٧ — ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى في أحدهما زاويتان وضلع نظائرها في الثاني
٥٥	في تطابق المثلثين
٥٦	نظرية ١٨ — ينطبق المثلثان القائم الزاوية كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى من أحدهما وترو ضلع نظيرهما من الثاني
٥٧	نظرية ١٩ — اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيرهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعي الأول أكبر من نظيرتها المحصورة بين ضلعي الثاني كان الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من نظيره في المثلث الثاني
٥٨	عكس نظرية ١٩
	في الأشكال المتوازية الأضلاع
٦١	تعريف
٦٢	نظرية ٢٠ — اذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان في أي شكل رباعي يساوى وتوازى الضلعان الآخران
٦٣	نظرية ٢١ — في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان وكل زاويتين متقابلتين متساويتان والقطر يقسم الشكل الى قسمين متساويين
٦٤	نتيجة ١ — اذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة فكل زاوية أخرى فيه قائمة أيضا
٦٤	نتيجة ٢ — أضلاع المربع متساوية وزواياه قوائم
٦٤	نتيجة ٣ — قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر
٦٧	نظرية ٢٢ — اذا قطع مستقيم عدة مستقيمت متوازية وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المتوازيات متساوية فالأجزاء المحصورة بينها لاى قاطع آخر متساوية كذلك
٦٨	نتيجة — اذا قسمنا أحد أضلاع المثلث $abc$ الى $ا$ ولكن $ab$ الى أقسام متساوية بالنقط $ص$ $ك$ $ع$ $ح$ ثم مددنا من هذه النقط المستقيمت $س$ $ص$ $ك$ $ع$ $ح$ موازية للقاعدة $ac$ فان هذه المتوازيات تقسم الضلع الثاني $ac$ الى أقسام متساوية
٧١	مقياس الرسم القطري
	الهندسة العملية — العمليات
٧٤	المقدمة والأدوات اللازم استعمالها

صفحة	عمليات على المستقيمات والزوايا
٧٥	عملية ١ — المطلوب تصفيف زاوية معلومة
٧٦	» ٢ — المطلوب تصفيف مستقيم محدود
٧٧	» ٣ — المطلوب إقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه
٧٩	» ٤ — المطلوب انزال عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه
٨١	» ٥ — المطلوب مد مستقيم يصنع مع آخر معلوم من نقطة مفروضة عليه زاوية تساوي زاوية معلومة
٨٢	» ٦ — المطلوب رسم مستقيم يساوي آخر معلوما من نقطة مفروضة
٨٣	» ٧ — المطلوب تقسيم مستقيم محدود الى عدد ما من الأقسام المتساوية
	في انشاء المثلثات
٨٥	» ٨ — المطلوب انشاء المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة
٨٧	» ٩ — المطلوب انشاء المثلث المعلوم منه ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما
٨٨	» ١٠ — المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه الوتر وأحد الضلعين الآخرين
	في انشاء الأشكال الرباعية
٩١	» ١١ — المطلوب انشاء الشكل الرباعي المعلوم منه زاوية وأضلاعه الأربعة
٩٢	» ١٢ — المطلوب انشاء متوازي الاضلاع المعلوم منه ضلعان متجاوران والزاوية المحصورة بينهما
٩٣	» ١٣ — المطلوب انشاء المربع المعلوم ضلعه
	المحل الهندسي
٩٦	» ١٤ — المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقطة (د) التي بعدها عن النقطتين المعلومتين أ ب دائماً متساويان
٩٧	» ١٥ — المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقطة (د) التي بعدها عن المستقيمين المعلومين أ ب ح د دائماً متساويان
٩٨	تقاطع المحال الهندسية
	المستقيمات المتلاقية في نقطة واحدة في المثلث
١٠١	١ — الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من أوساطها لتلاقي جميعا في نقطة واحدة
١٠١	٢ — منصفات زوايا المثلث لتلاقي جميعا في نقطة واحدة
١٠٢	٣ — المستقيمات المتوسطة للمثلث لتلاقي جميعا في نقطة واحدة
١٠٣	نتيجة — ملحق المستقيمات المتوسطة في المثلث على ثلث كل منها من جهة القاعدة والثلثين من جهة الرأس

## الجزء الثاني - في المساحات

- صفحة  
 ١٠٧ تعاريف  
 ١٠٨ نظرية ٢٣ - مساحة المستطيل  
 ١١٢ نظرية ٢٤ - متوازي الأضلاع المتحدان في القاعدة والمحصوران بين مستقيمين متوازيين متكافئان  
 ١١٣ مساحة متوازي الأضلاع  
 ١١٥ نظرية ٢٥ - مساحة المثلث  
 ١١٧ نظرية ٢٦ - المثلثات المتحدة في القاعدة ورؤوسها على مستقيم موازها متكافئة  
 ١١٧ نظرية ٢٧ - المثلثات المتكافئة المتحدة في القاعدة والمرسومة في جهة واحدة منها تكون رؤوسها على مستقيم يوازي تلك القاعدة  
 ١٢١ نظرية ٢٨ - مساحة (أولا) شبه المنحرف  
 (ثانيا) أى شكل رباعي  
 ١٢٣ مساحة الأشكال الكثيرة الأضلاع  
 ١٢٧ نظرية ٢٩ - [نظرية فيثاغورس] المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين  
 ١٢٩ طريقة عملية للبرهنة على نظرية فيثاغورس  
 ١٣٢ (نظرية ٣٠ - إذا كان المربع المنشأ على أحد أضلاع مثلث يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كانت الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين قائمة  
 ١٣٤ عملية ١٦ - المطلوب رسم المربع الذى مساحته ضعف مساحة مربع معلوم أو ثلاثة أمثاله أو أربعة أمثاله وهكذا

## دعاوى عملية على المساحات

- ١٣٧ عملية ١٧ - المطلوب رسم متوازي الأضلاع الذى يكافئ مثلثا معلوما بحيث تكون احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة  
 ١٣٩ عملية ١٨ - المطلوب رسم مثلث يكافئ شكلا رباعيا معلوما  
 ١٤٠ عملية ١٩ - المطلوب رسم شكل متوازي الأضلاع يكافئ شكلا كثير الأضلاع معلوما بحيث تكون احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة

## المحوران الاحداثيان والبعدان الاحداثيان

١٤٦ تمارين على ورق المربعات

## الجزء الثالث — الدائرة

## تعاريف ومبادئ أولية

صفحة

١٥٦ التماثل في الدائرة

١٥٧ بعض خواص التماثل في الدوائر

## في الأوتار

١٥٩ نظرية ٣١ — المستقيم المار بمركز الدائرة والمنصف لأي وتر فيها غير مار بالمركز عمود على هذا الوتر وبالعكس اذا كان هذا المستقيم عمودا على الوتر فانه ينصفه

١٥٩ نتيجة ١ — المستقيم المقام عمودا على وتر في دائرة من منتصفه يمر بمركزها

١٦٠ نتيجة ٢ — المستقيم لا يمكن أن يقطع الدائرة في أكثر من نقطتين

١٦٠ نتيجة ٣ — وتر الدائرة يكون بتمامه فيها

١٦١ نظرية ٣٢ — كل ثلاث قطع ليست على استقامة واحدة لا يمكن أن يمر بها إلا محيط دائرة واحد

١٦١ نتيجة ١ — يكفي لتعيين وضع الدائرة ومساحتها معرفة ثلاث قطع فقط من محيطها

١٦١ نتيجة ٢ — لا يمكن أن يشترك محيطا دائرتين في أكثر من نقطتين إلا اذا انطبق كل على الآخر تمام الانطباق

١٦١ فرض عملي

١٦٣ نظرية ٣٣ — اذا أمكن مد ثلاثة مستقيمت متساوية من نقطة داخل دائرة الى محيطها كانت النقطة المذكورة مركز الدائرة

١٦٥ نظرية ٣٤ — الأوتار المتساوية في الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها

وبالعكس الأوتار التي على أبعاد متساوية عن المركز متساوية

١٦٧ نظرية ٣٥ — اذا اختلف بعدا وترين عن مركز الدائرة فأقرب الوترين أكبرهما

وبالعكس أكبر الوترين أقربهما من المركز

١٦٨ نتيجة — أكبر أوتار الدائرة قطرها

١٧٠ نظرية ٣٦ — اذا رسم من نقطة داخل دائرة غير مركزها عدة مستقيمت الى محيطها فأكبرها ما كان

مارا بالمركز وأصغرها هو امتداد الاكبر ليكون قطرا واكبر المستقيمت الأخرى ما كان مقابلا لأكبر زاوية مركزية

١٧٣ نظرية ٣٧ — اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها عدة مستقيمت الى المحيط فأكبرها ما مر

بالمركز وأصغرها ما اذا امتد على استقامته مر بالمركز وأكبر المستقيمت الأخرى

ما كان مقابلا لأكبر زاوية مركزية

## الزوايا المرسومة في الدائرة

منحة

- ١٧٦ نظرية ٣٨ — الزاوية المركبة ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس المحصور بين ضلعيها  
 ١٧٨ نظرية ٣٩ — الزوايا المرسومة في قطعة واحدة من الدائرة متساوية  
 ١٧٩ عكس نظرية ٣٩ — الزوايا المتساوية المرسومة على قاعدة واحدة في جهة واحدة منها تكون رؤوسها على قوس دائرة هذه القاعدة وترقيها  
 ١٨٠ نظرية ٤٠ — الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي المرسوم داخل دائرة متكاملتان  
 ١٨١ عكس نظرية ٤٠ — اذا كانت الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي متكاملتين أمكن أن يمر برؤوسه محيط دائرة واحد  
 ١٨٢ نظرية ٤١ — الزاوية المرسومة في نصف الدائرة قائمة  
 ١٨٣ نتيجة — الزاوية المرسومة في قطعة أكبر من نصف الدائرة حادة والتي في قطعة أصغر من نصف الدائرة منفرجة  
 ١٨٤ نظرية ٤٢ — في الدوائر المتساوية اذا كانت الزوايا المركزية أو المحيطية متساوية كانت أقواسها متساوية  
 ١٨٤ نتيجة — في الدوائر المتساوية تتساوى القطاعات اذا تساوت زواياها  
 ١٨٥ نظرية ٤٣ — في الدوائر المتساوية تتساوى الزوايا المركزية أو المحيطية اذا تساوت أقواسها  
 ١٨٦ نظرية ٤٤ — في الدوائر المتساوية تتساوى الأقواس اذا تساوت أوتارها القوس الأكبر يساوي الأكبر والأصغر يساوي الأصغر  
 ١٨٧ نظرية ٤٥ — في الدوائر المتساوية تتساوى الأوتار اذا تساوت أقواسها  
 في التماس

## ١٩٠ تعاريف ومبادئ أولية

- ١٩٢ نظرية ٤٦ — تماس الدائرة في نقطة مامن المحيط عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس  
 ١٩٢ نتيجة ١ — لا يمكن أن يمد الا تماس واحد لدائرة من نقطة مفروضة على محيطها  
 ١٩٢ نتيجة ٢ — العمود المقام على التماس من نقطة التماس لابد أن يمر بالمركز  
 ١٩٢ نتيجة ٣ — نصف القطر العمودي على التماس لابد أن يمر بنقطة التماس  
 ١٩٤ نظرية ٤٧ — يمكن أن يمد من نقطة خارج دائرة مماسان لمحيطها  
 ١٩٤ نتيجة — اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها مماسات لها كانتا متساويتين ومقابلين لزاويتين مركبتين متساويتين  
 ١٩٧ نظرية ٤٨ — اذا تماس محيطا دائرتين كانت نقطة التماس على خط المراكزين  
 ١٩٧ نتيجة ١ — اذا تماس دائرتان من الخارج فالبعد بين مركبيهما يساوي مجموع نصفى القطرين

مقدمة  
 ١٩٧ نتيجة ٢ — اذا تماست دائرتان من الداخل فان البعدين من مركزهما يساوى الفرق بين نصفى القطرين  
 ١٩٩ نظرية ٤٩ — الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ووترها المار بنقطة التماس والواقعة فى احدى  
 جهتي الوتر تساوى الزاوية المحيطية المرسومة على هذا الوتر فى الجهة الأخرى منه

### فى الدعاوى العملية

٢٠١ التحليل الهندسى  
 ٢٠٢ عملية ٢٠ — المعلوم دائرة أو قوس منها والمطلوب إيجاد مركزها  
 ٢٠٣ » ٢١ — المطلوب تصنيف قوس معلوم  
 ٢٠٣ » ٢٢ — المطلوب رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها  
 ٢٠٤ » ٢٣ — المطلوب رسم مماس مشترك لدائرتين معلومتين  
 ٢٠٧ فى رسم الدوائر  
 ٢٠٩ عملية ٢٤ — المطلوب رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة  
 ٢٠٩ نتيجة — اذا أريد فصل قطعة من دائرة تقبل زاوية معلومة يكفى أن نمد مماسا لهذه الدائرة  
 ونرسم من نقطة التماس وترافقها يصنع مع المماس المذكور زاوية تساوى الزاوية المعلوم

### الدائرة والأشكال المستقيمة الأضلاع

٢١١ تعاريف  
 ٢١٢ عملية ٢٥ — المطلوب رسم دائرة خارج مثلث معلوم  
 ٢١٣ » ٢٦ — المطلوب رسم دائرة داخل مثلث معلوم  
 ٢١٤ » ٢٧ — المطلوب رسم دائرة تمس المثلث من الخارج  
 ٢١٥ » ٢٨ — المطلوب رسم مثلث داخل دائرة معلومة زواياه تساوى زوايا مثلث آخر معلوم  
 ٢١٦ » ٢٩ — المطلوب رسم مثلث خارج دائرة معلومة زواياه تساوى زوايا مثلث آخر معلوم  
 ٢١٩ » ٣٠ — المعلوم دائرة والمطلوب رسم مضلع منتظم داخلها وآخر خارجها  
 ٢٢٠ » ٣١ — المعلوم مضلع منتظم والمطلوب رسم دائرة داخله وأخرى خارجه  
 ٢٢١ فى محيط الدائرة  
 ٢٢٢ فى مساحة الدائرة

### نظريات وأمثلة على الدوائر والمثلثات

٢٢٦ ملحق أرباعايات المثلث  
 ٢٢٩ للحال الهندسية  
 ٢٣١ خط سمسون  
 ٢٣٣ المثلث والدوائر المتعلقة به  
 ٢٣٧ نظرية النقط التسع

## الجزء الأول

---





# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## علم الهندسة

### الجزء الأول

#### البديهيات

بنى علماء الرياضة جميع براهينهم على قواعد ثابتة ومبادئ بسيطة يدركها العقل لأول وهلة لسهولة  
ووضوحها ولا يحتاج للتسليم بصحتها الى دقة نظر أو إقامة دليل

وهذه المبادئ البسيطة الأولية تسمى بالبديهيات نحو الأشياء التي يساوى كل منها الشيء نفسه متساوية  
والبديهيات الآتية مما يحتاج اليها كثيرا في البراهين الهندسية وهي مرتبة على ترتيب القواعد الأربع  
الأصلية في علم الحساب

الجمع : اذا أضفنا أشياء متساوية الى أخرى متساوية كانت الحواصل متساوية

الطرح : اذا طرحنا أشياء متساوية من أخرى متساوية كانت البواقي متساوية

الضرب : المضاعفات الواحدة للأشياء المتساوية تكون متساوية فان كان شيان متساويين كان  
مثلا أحدهما مساويين لمثل الآخر

القسمة : اذا انقسم كل من الأشياء المتساوية الى عدد واحد من أجزاء متساوية كانت هذه الأجزاء  
في الجمع متساوية .

فانصاف الأشياء المتساوية متساوية

وهذه البديهيات لم نوردنا هنا إلا على سبيل التمثيل فقط وهناك غيرها وهي عامة لا يمكن تطبيقها بمثابة  
واحدة على جميع المقادير أيا كان نوعها . ولعلم الهندسة بديهيات خاصة نورد كلا منها عند الحاجة

## التعاريف والمبادئ الأولى

لكل من النقطة والخط والسطح في علم الهندسة مدلول خاص غير ما تدل عليه عند إطلاقها

١ فالنقطة الهندسية كل ماله وضع مجرد عن الطول والعرض والارتفاع

وهذا معناه أن النقطة لا تتحرك بغير من الطول والعرض بل تتحرك فقط بالموضع الذي تشغله فإذا عينا نقطة بقلم الرصاص الدقيق على قطعة من الورق فهذه يمكن أن تدل بوجه التقريب على نقطة هندسية غير أنها لا تخلو من طول وعرض أبدا مهما صغرت فلا يمكن اعتبارها نقطة هندسية بالمعنى الصحيح وانما هي كلما صغرت كانت أقرب الى الدلالة على النقطة الهندسية

٢ والخط ما له طول وليس له عرض

ويحدث من تحريك نقطة فإذا تصورنا تحريك النقطة التي عيناها على الورقة فانها تحدث ما يمثل الخط ولكن هنا مهما كان دقيقا في الرسم لا يخلو من عرض فلا يمكن اعتباره خطا هندسيا بالمعنى الصحيح وكما دق هذا الخط كان أقرب الى الخط الهندسي

٣ وإذا تبينا الفكرة وانتقلنا من الخط الى السطح كما انتقلنا من النقطة الى الخط نقول ان السطح هو ماله طول وعرض وليس له ارتفاع

فالجسم على هذا المثال هو ماله طول وعرض وارتفاع

وبما ذكر تظهر العلاقة بين الجسم والسطح والخط والنقطة فيما خلاصته

أولا - الجسم يتحدد بسطوح

ثانيا - السطح يتحدد بخطوط والسطوح لتتلاقى في خطوط

ثالثا - الخط يتحدد أو ينتهي بنقطتين والخطوط لتتلاقى في نقط

٤ الخط إما أن يكون مستقيما أو منحنيا

فالستقيم ما حدث من تحريك نقطة في اتجاه واحد لا يتغير

والمنحني ما حدث من تحريك نقطة في اتجاه يتغير على الدوام

بينة - اذا وصل بين أى نقطتين معلومتين بمستقيم لا يمكن أن يوصل بينهما بمستقيم آخر وبعبارة

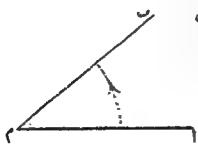
أخرى اذا اشترك مستقيمان في نقطتين فانهما يتحدان

٥ المستوي هو سطح ينطبق عليه المستقيم تمام الانطباق مهما تغير وضعه

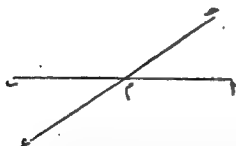
٦ اذا تلاقى مستقيمان في نقطة حدثت من تلاقيهما ما يسمى زاوية

ويسمى كل من المستقيمين بضلع الزاوية ونقطة تلاقيهما برأسها

وهذان الضلعان لا ارتباط لطولهما بمقدار الزاوية المحصورة بينهما الذي هو في الحقيقة مقدار دوران أحد الضلعين وإقترافه عن الآخر ومقدار هذا الدوران لا ارتباط له بطول الضلعين  
فثلا ان فرضنا أن الضلع  $م$  ثابت لا يتحرك وأن الضلع الآخر  $ب$  يتحرك حول نقطة  $م$  وأنه قبل تحركه كان متطابقا على  $ا$  ثم تحرك الى أن صار في الوضع  $ب$  فمقدار الزاوية  $ا م ب$  الناشئة من ذلك يقدر بقدر دوران هذا الضلع من وضعه الأول  $ا م ب$  الى وضعه الثاني  $م ب$



وبدعى أن مقدار هذا الدوران لا ارتباط له بطول الضلعين  
إذا تلاقى عدة مستقيمت في نقطة فكل زاويتين اشتركتا في ضلع واحد وكانت احدهما على جهة منه والثانية على الأخرى تسميان الزاويتين المتجاورتين  
فثلا الزاويتان  $ا م ب$  و  $ب م ج$  المشتركتان في الضلع  $م ب$  وعلى كل من جهتيه متجاورتان



إذا تقاطع مستقيمان مثل  $ا ب$  و  $ج د$  في نقطة  $م$  يقال للزاويتين  $ا م ب$  و  $ج م د$  أو  $ب م ج$  و  $د م ا$  مقابلتان بالرأس

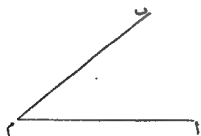
٧ إذا تلاقى مستقيمان وكانت الزاويتان المتجاورتان الحادتان متساويتين يقال لكل زاوية منهما قائمة ويقال للمستقيمين متعامدان وإن كلا منهما عمودى على الآخر  
بسمية ١ — فرض نقطة مثل  $م$  على المستقيم  $ا ب$  وتصور مستقيما آخر مثل  $ج د$  يدور حول  $م$  مبتدئا من الوضع  $ا م ب$  ومنتبيا في دورانه الى الوضع  $م ب ج$  فانه في أثناء دورانه لا يمكن أن يأخذ إلا وضعا واحدا يكون فيه عموديا على  $ا ب$   
بسمية ٢ — الزوايا القوائم متساوية



تقسم الزاوية القائمة الى ٩٠ قسما متساوية كل منها يسمى درجة (°) وتقسم الدرجة الى ٦٠ قسما متساوية كل منها يسمى دقيقة (') وتقسم الدقيقة الى ٦٠ قسما متساوية كل منها يسمى ثانية (")  
فان دار المستقيم  $ج د$  (في الشكل المقدم) حول نقطة  $م$  من الوضع  $ا م ب$  الى الوضع  $م ب ج$  فانه يدور بقدر زاويتين قائمتين أى بقدر ٩٠°

ولو دار المستقيم م ح دورة تامة حول النقطة المذ كورة مبتدئا من الوضع م ا حتى عاد اليه فانه قد دار بقدر أربع زوايا قوائم أو بقدر  $360^\circ$

٨ يقال للزاوية اذا كانت أقل من القائمة حادة أى أن مقدار الزاوية الحادة أقل من  $90^\circ$



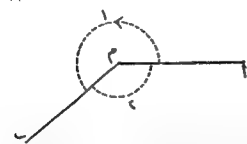
٩ ويقال للزاوية اذا كانت أكبر من القائمة وأصغر من قائمتين منفرجة أى أن مقدار الزاوية المنفرجة محصور بين  $90^\circ$  و  $180^\circ$



١٠ اذا دار أحد ضلعي زاوية مثل م ب حتى صار على استقامة الضلع الآخر م ا فان الزاوية الحادثة يقال لها مستقيمة وعليه فالزاوية المستقيمة = زاويتين قائمتين  $= 180^\circ$



١١ اذا كانت الزاوية أكبر من قائمتين وأصغر من أربع قوائم تسمى زاوية منعكسة وعليه فمقدار الزاوية المنعكسة ينحصر بين  $180^\circ$  و  $360^\circ$



ملاحظة — اذا تلاقى مستقيمان في نقطة حدثت من تلاقيهما زاويتان احدهما أكبر من قائمتين والأخرى أصغر من قائمتين وهذا ناشئ من اعتبار دوران الضلع م ب حول نقطة م بعد أن كان منطبقا على م ا

فالدوران إما أن يتبدى من أعلى م ا الى الجهة اليسرى او من أسفله الى الجهة اليمنى

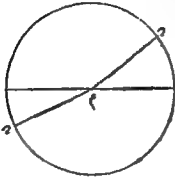
فلو تصورنا ان م ب دار حول م ا من الوضع م ا الى الجهة اليسرى كما هو مبين في الشكل المنقسم برقم ١ وصار في الوضع الذى هو فيه فانه يكون ذلك قد دار بقدر زاوية أكبر من قائمتين

أما اذا دار من الوضع م ا الى الجهة اليمنى وصار في الوضع الذى هو فيه كما هو مبين في الشكل المذكور برقم ٢ فانه بذلك يكون قد دار بقدر زاوية أقل من قائمتين

وعند الاطلاق لا يعتبر من الزاويتين الحادتين من تلاقى مستقيم بأخر إلا ما كانت أقل من قائمتين فان أريدت الأخرى وجب ذكر ما يدل على ذلك

١٢ الشكل المستوي هو جزء من السطح المستوي محدود بخط أو أكثر

١٣ الدائرة هي شكل مستو محاط بخط حادث من حركة نقطة على بعد واحد دائما من نقطة أخرى ثابتة



فمثلا النقطة 'م' ثابتة و 'ب' متحركة حول 'م' على بعد واحد دائما منها فالشكل الناتج من ذلك يسمى دائرة وتسمى النقطة الثابتة بمركز الدائرة

والخط المحد للـدائرة بمحيطها

١٤ نصف قطر الدائرة مستقيم خارج من المركز ومتمه بالمحيط وينتج من هذا التعريف أن أنصاف أقطار الدائرة متساوية

١٥ قطر الدائرة هو مستقيم مار بالمركز وطرفاه على المحيط

١٦ قوس الدائرة جزء من محيطها



١٧ نصف الدائرة هو شكل محدود بقطر الدائرة وجزء المحيط

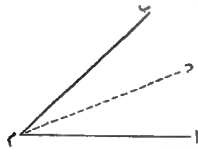
المنتهى بطرفي هذا القطر

١٨ تنصيف الشيء تقسيمه الى جزأين متساويين

بسيطة ١ — اذا تحركت نقطة مثل 'م' من 'ا' الى 'ب' على اتجاه المستقيم 'ا ب' فانها لا بد أن تأخذ وضعا واحدا تقسم فيه المستقيم 'ا ب' الى قسمين متساويين أى ان كل مستقيم محدود فيه نقطة تنصيف واحدة



بسيطة ٢ — انا كانت المستقيم 'م ب' منطبقا على 'ا م' ودار حول النقطة 'م' من الوضع 'ا م' حتى انطبق على 'م ب' فانه لا بد أن يأخذ وضعا واحدا يقسم فيه الزاوية 'ا م ب' الى قسمين متساويين أى أنه يمكن اعتبار أن لكل زاوية مستقيما واحدا ينصفها



العمليات المسلم بصحة فرضها

ينتج من البسيطات المذكورة في ٧ ٦ ١٨ أنه يمكن اجراء العمليات الآتية

أولا — اقامة عمود على مستقيم معلوم من أى نقطة عليه

ثانيا — إيجاد نقطة منتصف مستقيم محدود

ثالثا — إيجاد المستقيم النصف لزاوية معلومة

## الانطباق والتساوى

بسيطة - الأشياء التي يمكن أن ينطبق كل منها على الآخر انطباقا تاما متساوية  
ويؤخذ من ذلك أنه لأجل مقارنة خطين أوزاويتين أو أى شكلين كل بالآخر يمكن أن نتصور رفع  
أحدهما من وضعه الأصلي بشرط ألا يحدث فيه أى تغير سواء في صورته أو مقداره وتطبيقه على الثاني  
فإن انطبق الشيطان كل على الآخر تمام الانطباق كانا متساويين وتسمى هذه العملية بعملية التطبيق

## القضايا المسلم بصحتها

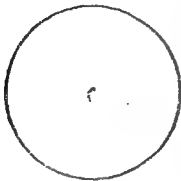
يلزم استعمال آلات خاصة لرسم الأشكال الهندسية وإنشائها واللازم استعماله منها لرسم الأشكال التي  
بهذا الكتاب هو المسطرة والبرجل

والقضايا الآتية تستدعى استعمال هاتين الآلتين وهما كافيتان لإجراء ما تستلزمه كل منها وهما هي

الأولى - يمكن مد مستقيم من أى نقطة مفروضة الى أى نقطة أخرى معلومة

الثانية - يمكن مد مستقيم محدود على استقامته الى أن يبلغ أى طول

الثالثة - يمكن رسم دائرة من أى نقطة نعتبرها مركزا وبأى نصف قطر مهما كان طوله



ملاحظة ١ - يؤخذ من القضية الثالثة أنه لو أخذ طول

أى مستقيم معلوم مثل  $س$  بواسطة البرجل وركز في أى نقطة  
مفروضة مثل  $م$  فإنه يمكن رسم دائرة نصف قطرها مساو للمستقيم  
المعلوم  $س$

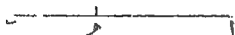
وبعبارة أخرى يقال أنه بواسطة البرجل يمكن نقل الأبعاد من أى  
جهة الى أخرى

ملاحظة ٢ - وعلى ذلك ان فرضنا أن المستقيم  $أ ب$



كبر من المستقيم  $س$  يمكننا أن نأخذ على  $أ ب$  البعد

$أ ه$  مساويا  $س$  لأنه إذا ركز بالبرجل في نقطة  $أ$  وبيعد



يساوى  $س$  رسم قوس يقطع  $أ ب$  في  $ه$  فن الواضح

أن  $أ ه$  يساوى  $س$

### تمهيد

١ الهندسة المستوية تبحث في خواص الخطوط والأشكال المرسومة على السطح المستوي

٢ ويتقسم هذا العلم الى عدة أبحاث كل منها يسمى دعوى والدعوى فواتر نظرية وعملية

فالنظرية تتطلب إقامة البرهان على صحة عبارة هندسية

والعملية تتطلب إنشاء عمل هنئى كرم خط له صفة خاصة او شكل بصورة معينة

٣ وتركب الدعوى من الأجزاء الآتية

١ — المنطوق العام وبيين الفرض من الدعوى بعبارة عامة

٢ — المنطوق الخاص ويتضمن البيان السابق بعبارة خاصة يرجع فى ايضاحها الى شكل يسهل

به ادراك البرهان

٣ — العمل وهو رسم المستقيمت أو الدوائر التى يحتاج اليها لحل الدعاوى العملية أو اثبات

الدعاوى النظرية

٤ — البرهان وهو الذى به تتبين صحة حل العملية أو صدق النظرية

٤ النتيجة وهى حقيقة مستخرجة من دعوى قام الدليل على صحتها فتلتحق عادة بها ولا تحتاج

فى الغالب الى برهان جديد

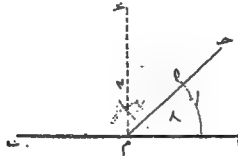
٥ والرموز الآتية مستعملة فى هذا الكتاب

الرمز	المطلوب
∴	اذن
=	يساوى
∠	زاوية
≅	مثلث
∠	زاوية قائمة

## في الخطوط والزوايا

### نظرية ١

مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادتين من تلاقى مستقيم بآخر وفي جهة واحدة منه يساوى زاويتين قائمتين



إذا فرضنا أن المستقيم  $c$  يصنع بتلاقيه مع المستقيم  $a$  في نقطة  $m$  الزاويتين المتجاورتين  $a$   $m$   $6$   $m$   $b$  فانه يطلب اثبات ان

$$زاويتين قائمتين = a + m + b$$

لذلك نفرض اقامة العمود  $c$  على  $a$   
 البرهان  $a + m + b = a + m + b$   
 كذلك  $a + m + b = a + m + b$   
 $\therefore$   $a + m + b = a + m + b$   
 وهو المطلوب = زاويتين قائمتين

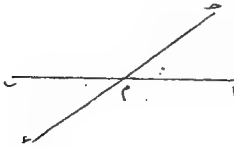
برهان آخر بواسطة الدوران

لو تصورنا أن المستقيم  $c$  كان منطبقاً على المستقيم  $a$  وأنه أخذ يدور حول  $m$  من الوضع  $a$  الى أن انطبق على  $b$  فانه بذلك يدور في الحقيقة بقدر زاويتين قائمتين لأن  $a$   $m$   $b$  خط مستقيم ومن حيث ان مقدار الزاويتين  $a$   $m$   $6$   $m$   $b$  يساوى مقدار دوران  $c$  حول  $m$  من الوضع  $a$  الى الوضع  $b$

وهذا المقدار يساوى زاويتين قائمتين

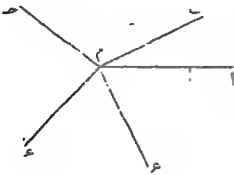
$$\therefore a + m + b = زاويتين قائمتين$$





نتيجة ١ - إذا تقاطعت مستقيمان فمجموع الزوايا الأربع الحادثة من تقاطعهما يساوي أربع قوائم أي أن

$$ج + د + ب + أ = ٤ ق$$



نتيجة ٢ - إذا مدت عدة مستقيمان من نقطة واحدة فمجموع الزوايا الحادثة الماخوذة واحدة بعد الأخرى يساوي أربع قوائم

لأنه لو مدد مستقيمان من النقطة 'م' ودار حولها وصنع على الترتيب الزوايا 'أ' 'ب' 'ج' 'د' 'هـ' 'و' 'ز' 'ح' فانه يتم دورة كاملة وبذلك يدور بقدر أربع زوايا قوائم

### تعريفان

١ يقال للزاويتين اللتين مجموعهما يساوي قائمتين انهما متكاملتان وإن كلا منهما مكمل للآخرى

ففي شكل نظرية (١) الزاويتان 'أ' 'ب' متكاملتان

وكذلك زاوية ١٢٣° مكمل للزاوية ٥٧°

٢ يقال للزاويتين اللتين مجموعهما يساوي قائمة واحدة انهما متتامتان وإن كلا منهما متممة للآخرى

ففي شكل نظرية (١) الزاوية 'د' 'ج' متممة للزاوية 'أ' 'ب'

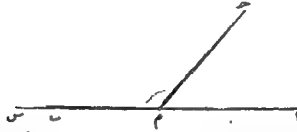
وكذلك زاوية ٣٤° متممة للزاوية ٥٦°

نتيجة ٣ - أولاً - مكملات الزاوية الواحدة متساوية

ثانياً - متممات الزاوية الواحدة متساوية

نظرية ٢

إذا كان مجموع أى زاويتين متجاورتين مساويا قائمتين كان ضلعاها المتطرفان على استقامة واحدة



إذا فرضنا أن مجموع الزاويتين المتجاورتين  $\angle ١ + \angle ٢ = ٩٠^\circ$   $\angle ١$  يساوى قائمتين

فانه يطلب اثبات أن ضلعيهما المتطرفين  $\angle ١$   $\angle ٢$  على استقامة واحدة

لذلك نمد  $\angle ١$  على استقامته الى  $\angle ٣$  ويكفى أن نثبت أن

$\angle ٣$  منطبق على  $\angle ٢$

البرهان - من حيث أن  $\angle ١$  من مستقيم بالعمل

(نظرية ١)

$\therefore \angle ٣ + \angle ١ = ١٨٠^\circ$  من تكمل  $\angle ١$

بافتراض

ولكن  $\angle ٣ + \angle ٢ = ١٨٠^\circ$  من تكمل  $\angle ٢$

$\therefore \angle ٣ + \angle ١ = \angle ٣ + \angle ٢$

$\therefore$  ينطبق المستقيمان  $\angle ١$   $\angle ٢$

بالعمل

ومن حيث أن  $\angle ١$  من على استقامة  $\angle ١$

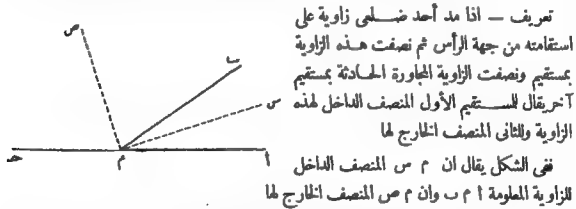
وهو المطلوب

$\angle ٢$  من على استقامة  $\angle ١$  يكون

## تمارين

- ١ المطلوب إيجاد مكملات الزوايا الآتية وهي نصف زاوية قائمة ٦ أربعة أثلاث قائمة ٤٦٦  
٩١٤٩٦ ٨٣ ٦ ٩١٥ ٦
- ٢ المطلوب إيجاد مكمات الزوايا الآتية وهي نحسا زاوية قائمة ٢٧ ٦ ١٦ ٦ ٣٨ ٦ ٣٠ ٦ ٢٩ ٦ ٤١ ٦
- ٣ اذا تقاطع مستقيمان وكانت احدى الزوايا الأربع الحادثة قائمة كانت كل من الثلاث الأخرى قائمة كذلك

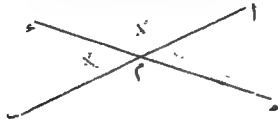
- ٤ في المثلث  $ABC$  الزاويتان  $A$  و  $B$  متساويتان برهن على أنه لو مد الضلع  $BC$  على استقامته في كل من اتجاهيه لحدث أن الزاويتين الخارجيتين الحادتين متساويتان
- ٥ في المثلث  $ABC$  الزاويتان  $A$  و  $B$  متساويتان برهن على أنه لو مد كل من الضلعين  $AB$  و  $AC$  على استقامته تحت الضلع  $BC$  لحدث أن الزاويتين الخارجيتين الحادتين متساويتان



- ٦ برهن على أن منصفى زاويتين متجاورتين حادتين من تلاقى مستقيم بأعري يحصران بينهما زاوية قائمة وبعبارة أخرى المنصفان الداخل والخارج لزاوية قتا متعامدان
- ٧ برهن في الشكل المتقدم على ان  $A + B = 180^\circ$  من متتامتان
- ٨ برهن على أن الزاويتين  $B$  و  $C$  من متكاملتان وأن الزاويتين  $A$  و  $C$  من متكاملتان أيضا
- ٩ اذا كانت الزاوية  $A = 30^\circ$  في مقدار  $B = 150^\circ$  من

### نظرية ٣

إذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان



إذا فرضنا أن  $\angle 1 = \angle 3$  تقاطعا في م

فانه يطلب إثبات أولا أن  $\angle 1 = \angle 2$

ثانيا أن  $\angle 3 = \angle 4$

البرهان - من حيث ان المستقيم ١ يلاقى المستقيم ٢ في م

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

أي أن  $\angle 1 = 180^\circ - \angle 2$

وكذلك  $\angle 3 = 180^\circ - \angle 4$

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$$

أي أن  $\angle 1 = \angle 3$

وعليه فكل من  $\angle 1 = \angle 3$  وكل زاوية واحدة هي  $\angle 1$

$$\angle 1 = \angle 3$$

وبالطريقة نفسها يبرهن على أن

$$\angle 2 = \angle 4$$

وهو المطلوب

برهان آخر بطريقة الدوران

إذا تصورنا دوران المستقيم ١ م حول النقطة م حتى ينطبق الجزء ١ م على م يلزم أن ينطبق

الجزء ٢ م على م لأن كلا من ١ م و ٢ م مستقيمان

وعلى ذلك فمقدار الدوران اللازم لانسداد الزاوية ١ م هو عين مقدار الدوران اللازم لانسداد

الزاوية ٢ م

$$\angle 1 = \angle 2$$

## تمارين على الزوايا

(مسائل عديدة)

١ مامقدار الزوايا التي يدور فيها عقرب الدقائق أثناء تحركه مدة ٥ دقائق ٢١ دقيقة ٦  $\frac{1}{4}$  من الدقائق  
ثانية دقيقة ١٤ ١٠ ٦ وما هو الزمن الذي يستغرقه العقرب المذكور في دورانه زاوية مقدارها ٩٦° وأخرى  
مقدارها ٢٢٢°

٢ اذا ضبطت ساعة على الظهيرة مقدار كل من الزوايا التي دار فيها عقرب الساعات اذا كانت  
الساعة أولا ٥ ٤ ٣ وثانيا ١٠ ٥  
وما هي الساعة اذا دار هذا العقرب في زاوية مقدارها ١٧٢  $\frac{1}{4}$ °

٣ تدور الأرض دورة تامة حول محورها في ٢٤ ساعة مامقدار الزاوية التي تدور فيها الأرض  
دقيقة ساعة ٢٠ ٣ وما هو الزمن الذي تستغرقه في دوراتها في زاوية مقدارها ١٣٠°

٤ في شكل نظرية ٣  
(أولا) اذا كانت  $\angle م = ٣٥^\circ$  فما مقدار كل من الزوايا  $\angle م١$  و  $\angle م١٦$  و  $\angle م٦$  بدون أن نقاس

(ثانيا) اذا كان مجموع الزاويتين  $\angle م١$  و  $\angle م٦$  يساوي ٢٥٠° فما مقدار كل من الزاويتين  
 $\angle م١٦$  و  $\angle م٦$

(ثالثا) اذا كان مجموع الزوايا  $\angle م١٦$  و  $\angle م٦$  يساوي ٢٧٤° فما مقدار كل من الزوايا  
الأربع المصنعة في م

(مسائل نظرية)

٥ اذا فرضت نقطة مثل م على المستقيم المعلوم ا ب ورسم منها المستقيمان م١ و م٦ في كل من  
جهتيه على شرط أن  $\angle م١ = \angle م٦$  ا فانه يراد إثبات أن م١ يكون على استقامة م٦

٦ اذا تقاطع المستقيمان ا ب و ج في نقطة م وكان م من منصف ا ب و ج فانه يراد إثبات أن  
امتداد م ينصف ا ب و ج

٧ اذا تقاطع المستقيمان ا ب و ج في نقطة م وكان م من منصف ا ب و ج م من منصف ا ب و ج  
فانه يراد إثبات أن المصنفين م من م١ و م٦ على استقامة واحدة

(٨) اذا فرض أن م من منصف ا ب و ج وطوى الجزءان م١ و م٦ من ا ب أحدهما على  
الأخر حول م فان المستقيمان م١ و م٦ ينطبق على م١

وفي أى وضع يكون المستقيم م١ بالنسبة الى المستقيم م١ اذا كان

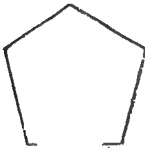
(أولا)  $\angle م١ = ١٠٠^\circ$  من أكبر من  $\angle م١$

(ثانيا)  $\angle م١ = ١٠٠^\circ$  من أصغر من  $\angle م١$

- ٩ المستقيمان  $a$  و  $b$  متقاطعان في  $c$  ومتعامدان يهمن على أنه لوجعلنا  $a$  ب حتماً قاصلاً للجزأى الشكل وطوبينا حوله أحد الجزأين على الآخر فإن المستقيم  $c$  ينطبق على  $a$  و
- ١٠ إذا رسمنا المستقيم  $a$  ب على قطعة من الورق ثم طوينا جزأها من نقطة  $c$  على شرط أن ينطبق  $a$  على  $b$  فانه يراد إثبات أن الخط الحادث من طى الورقة يكون عموداً على  $a$  و  $b$

### في المثلثات

- ١ علمنا أن الشكل المستوي هو جزء من السطح المستوي محدود بخط أو أكثر ويسمى مجموع الخطوط التي تحدد الشكل محيطه ويسمى مقدار السطح المحصور في المحيط بمساحة الشكل
- ٢ الأشكال المستقيمة الأضلاع هي المحدودة بخطوط مستقيمة
- ٣ المثلث هو شكل مستوي محدود بثلاثة مستقيمت
- ٤ الشكل الرباعي شكل مستوي محدود بأربعة مستقيمت



- ٥ كثير الأضلاع أو المضلع هو شكل مستوي محدود بأكثر من أربعة مستقيمت

- ٦ ويقال لمستقيم الأضلاع أنه متساوى الأضلاع إذا تساوت أضلاعه ومتساوى الزوايا إذا تساوت زواياه

ومتظم إذا كان متساوى الأضلاع والزوايا

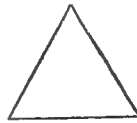
- ٧ والمثلث، بالنسبة إلى أضلاعه، إما أن يكون متساوى الأضلاع إذا تساوت أضلاعه ومتساوى الساقين إذا تساوى فيه ضلعان ومختلف الأضلاع إذا كانت أضلاعه مختلفة الطول



مثلث مختلف الأضلاع



مثلث متساوي الساقين



مثلث متساوي الأضلاع

ولأجل الاختصار يعبر عن مقدار كل زاوية في المثلث بالحرف اللاتيني على رأسها ففي المثلث  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$

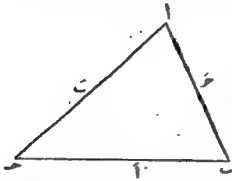
يعبر عن مقادير زواياه الثلاث بالحروف  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$

وكثيرا ما يرمز بالحروف  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$  لأطوال أضلاع

المثلث ويسمى الضلع باسم الزاوية التي تقابله فيسمى

الضلع  $\alpha$  المقابل  $\alpha$  بالضلع  $\beta$  المقابل  $\beta$  والضلع  $\gamma$  المقابل  $\gamma$

بالضلع  $\alpha$  والضلع  $\beta$  المقابل  $\beta$  بالضلع  $\gamma$



ويمكن اعتبار أي رأس من رؤوس زوايا المثلث رأسا له. وحينئذ يكون الضلع المقابل لهذا الرأس

قاعدة له. وإذا كان المثلث متساوي الساقين كان رأسه عادة نقطة تقاطع ساقيه المتساويين وزاوية الرأس

الزاوية المحصورة بين الساقين المتساويين

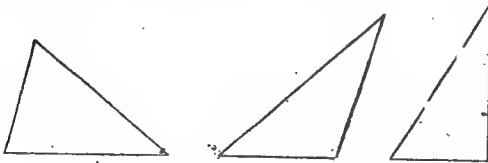
٨ والمثلث بالنسبة الى زواياه إما أن يكون

قائم الزاوية اذا كانت احدى زواياه قائمة

ومفرج الزاوية اذا كانت احدى زواياه مفرجة

وحاد الزوايا اذا كانت زواياه الثلاث حادة

ومستقيين في (نظرية ٨ نتيجة ٢) أنه يجب أن يكون في كل مثلث زاويتان حادتان على الأقل



مثلث حاد الزوايا

مثلث مفرج الزاوية

مثلث قائم الزاوية

ويسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية وتره

٩ المستقيم الواصل بين رأس المثلث ومتنصف قاعدته يسمى بالمستقيم المتوسط أو ينصف المثلث

### المقارنة بين مثلثين

المقارنة بين مثلثين إما أن تكون من حيث مساحتهما أو من حيث الأجزاء الستة لكل منهما وأجزاء المثلث الستة هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه إذا أمكن انطباق أحدهما على الآخر انطباقاً تاماً وفي هذه الحالة يكون كل جزء في المثلث الأول مساوياً لنظيره (أى الذى ينطبق عليه) فى المثلث الثانى ويكون المثلثان متساويين فى المساحة

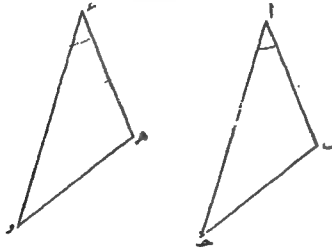
والأضلاع المتناظرة فى المثلثين المتساويين هى التى تقابل زوايا متساوية والزوايا المتناظرة فيهما هى التى تقابل أضلاعاً متساوية

ويقال للمثلثين اللذين يمكن أن تطبق جميع أجزاء أحدهما على جميع أجزاء الآخر انهما متطابقان



### نظرية ٤

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا تساوى في كل ضلعان والزوايا المحصورة بينهما نظائرهما في الآخر



اذا كان في المثلثين  $AB = DE$  و  $AC = DF$

$$\angle A = \angle D$$

$$\angle B = \angle E$$

والزوايا المحصورة  $\angle C = \angle F$  الزاوية المحصورة  $\angle A = \angle D$

فانه يطلب إثبات ان  $BC = EF$  و من عامة الوجوه أى أنهما ينطبقان أحدهما

على الآخر تمام الانطباق

البرهان - نطبق  $\triangle ABC$  على  $\triangle DEF$  على  $\angle A = \angle D$

على شرط أن النقطة  $A$  تقع على النقطة  $D$

وإخذ الضلع  $AB$  الاتجاه  $DE$

ومن حيث ان  $AB = DE$

∴ نقطة  $B$  تقع على نقطة  $E$

ومن حيث ان  $AC = DF$  انطبق  $\triangle ABC$  على  $\triangle DEF$

∴  $BC = EF$  يقع على  $D$

ومن حيث أن  $a = s$  و

قطعة  $c$  تقع على قطعة و  $\therefore$

ومن حيث أن ب وقعت على ه  $c = h$  على و

$\therefore$  الضلع ب  $c$  ينطبق على الضلع ه و

وعلى ذلك فالثلاث  $a = b = c$  ينطبق على الثلاث  $s = h = c$  و

وحيث فالثلاثان متساويان من عامة الوجوه وهو المطلوب

ملاحظة — ينبغي أن يميز دائماً بين ماهو مفروض في هذه النظرية وما يطلب البرهنة عليه

فالمفروض هو  $a = b$  و  $s = h$

$c = h$  و  $s = c$

$c = a = b = s = h = c$

ومن هذه القروض يمكن البرهنة على أن المثلثين ينطبقان كل على الآخر تمام الانطباق

ومن ذلك نستنتج أن  $a = b$  و  $s = h$

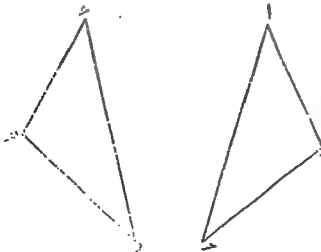
وأن  $c = h$  و  $s = c$

وأن  $c = a = b = s = h = c$

وأن المثلثين متساويان في المساحة

وبلاحظ ان الزاويتين اللتين برهننا على تساويهما في المثلثين تقابل كل منهما ضلعاً من المفروض

تساويهما



تنبيه — قد يلزم أحيانا أنه لأجل انطباق المثلثين. أحدهما على الآخر أن يعكس وضع أحدهما قبل تطبيقه وذلك ان كان المثلثان كما في هذا الشكل

## تمارين

١ المطلوب إثبات أن منتصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين (أولا) ينصف القاعدة (وثانيا) يكون عمودا عليها

٢  $AB$  مستقيم معلوم أقتنا عليه من وسطه  $M$  العمود  $MC$  برهن على أنه إذا أخذنا أى نقطة مثل  $D$  على  $MC$  ووصلنا بينها وبين  $A$   $CB$  يكون  $DA = DB$

٣ برهن على أن  $AC$   $CB$  قطرى المربع  $ABCD$  متساويان على فرض أن أضلاع المربع متساوية وزواياه قوائم

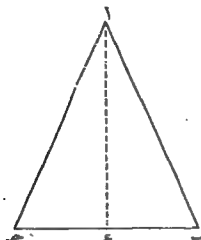
٤  $ABCD$  مربع والنقط  $H$   $D$   $C$  منتصفات الأضلاع  $AB$   $BC$   $CD$   $DA$  برهن على أن  
 (أولا)  $HD = DC$  | (ثالثا)  $AD = DC$   
 (ثانيا)  $AC = AD$  | (رابعا)  $BC = DC$

ارسم شكلا خاصا لكل حالة على حدة

٥  $ABCD$  مثلث متساوي الساقين أخذنا على ماقية  $AB$   $AC$  البعدين المتساويين  $AH$   $AG$  ثم وصلنا  $CH$   $BG$  برهن على أن  $CH = BG$

## نظرية ٥

زاويتا قاعدة المثلث المتساوي الساقين متساويتان



إذا فرضنا أن  $\angle أ ب ج = \angle أ ج ب$  متساوي الساقين فيه  $\angle أ = \angle ب$   
فانه يطلب إثبات أن  $\angle أ ب د = \angle أ ج د$

لذلك نعرض أن المستقيم  $أ د$  ينصف  $ب ج$  وأن  $د$  هي نقطة تقابل المنصف المذكور بالضلع  $ب ج$

البرهان - في  $\triangle أ ب د$  و  $\triangle أ ج د$

$$\left. \begin{array}{l} \angle أ = \angle ب \\ \angle أ د ب = \angle أ د ج \text{ مشترك بين المثلثين} \\ \angle ب د أ = \angle ج د أ \end{array} \right\} \text{ من حيث أن}$$

∴ ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق (نظرية ٤)

وبذلك  $\angle أ ب د = \angle أ ج د$  وهو المطلوب

وهناك برهان آخر وهو

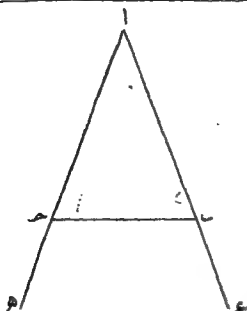
تصور على  $ب ج$   $هـ$   $\triangle أ ب هـ$  حول المستقيم  $أ د$

فمن حيث أن  $\angle أ ب د = \angle أ ج د$

يقع الضلع  $أ ب$  على الضلع  $أ ج$

ومن حيث أنهما متساويان تقع نقطة  $ب$  على نقطة  $ج$  وعلى ذلك ينطبق  $ب ج$  على  $ج ب$

∴  $\angle أ ب د = \angle أ ج د$  وبذلك تتساويان وهو المطلوب



نتيجة ١ - إذا مت كل من الساقين  $ا ب ٦$  من المثلث المتساوي الساقين  $ا ب ح$  على استقامته فان كلا من الزاويتين الخارجيتين  $٦ ب د ٦$   $٦ د ح ٦$  تكون مساوية للآخرى لأن كلا منهما تكمل إحدى زاويتي القاعدة المتساويتين

نتيجة ٢ - إذا كان المثلث متساوي الأضلاع فانه يكون متساوي الزوايا ايضا

تعريف - يقال ان في الشكل تماثلا بالنسبة الى خط معلوم فيه متى أمكن على الشكل بحيث ينطبق جزءا اللذان يفصلهما ذلك الخط كل على الآخر ويسمى المستقيم الذي يقسم الشكل الى جزئين متماثلين محور التماثل ومن الواضح أن هذا الانطباق لا يتأتى إلا إذا اتحد الحزبان المتقابلان مساحة وشكلا وتماثلا في وضعهما بالنسبة الى محور التماثل

إذا قررنا فبواسطة نظرية ه يمكن البرهنة على أن منتصف زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين يقسمه الى جزئين متماثلين ومنتصف أى زاوية في المثلث المتساوي الأضلاع يقسمه الى جزئين متماثلين

### تمارين

١  $ا ب د$  شكل رباعي أضلاعه متساوية برهن على أنه لو وصلنا القطر  $ب د$  لحدث ان

$$د ا ب = د ا د$$

$$٦ د ح = د ح د$$

$$٦ د ا = د ا د$$

٢  $ا ب ٦ د ٦ ح$  مثلثان متساويا الساقين مرسومان في جهتي قاعدة مشتركة بينهما وهي  $ب ح$  برهن (بواسطة نظرية ه) على أن  $د ا ب = د ا د$

٣  $ا ب ٦ د ٦ ح$  مثلثان متساويا الساقين لهما قاعدة مشتركة وهي  $ب ح$  وهما مرسومان في جهة واحدة منها ويراد إثبات أن

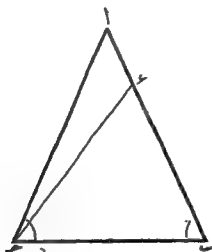
$$د ا ب = د ا د \text{ (بواسطة نظرية ه)}$$

٤  $ا ب ٦ ح$  مثلث متساوي الساقين فيه  $ا ب = ا ح$  فإذا نصفنا  $ا ب$  بالنقطة  $ل ٦ ب ح$  بالنقطة  $م ٦ ا ح$  بالنقطة  $د$  فانه يراد إثبات أن

$$(أولا) ل م = م د \text{ (ثانيا) } ب د = د ح \text{ (ثالثا) } د ا ل = د ا م$$

### نظرية ٦

إذا تساوى في المثلث زاويتان فإن الضلعين المقابلين لهما يكونان متساويين



إذا فرضنا أن  $AB = AC$  مثلث فيه

$$AB = AC$$

فانه يطلب إثبات أن الضلع  $AB = AC$

لذلك نقول أن لم يكن  $AB \neq AC$  متساويين كان أحدهما  $AB$  مثلا أكبر من الآخر

وعلى ذلك نأخذ البعد  $BD$  على  $AB$  مساويا للضلع  $AC$  ثم نصل  $CD$

البرهان — في  $\triangle BDC$  و  $\triangle ACD$

$$\left. \begin{array}{l} BD = AC \\ \angle BDC = \angle ACD \end{array} \right\} \text{ من حيث أن } \angle BDC = \angle ACD$$

$$\therefore \triangle BDC \cong \triangle ACD \text{ في المساحة (نظرية ٤)} \\ \text{والزاوية المحصورة } \angle BDC = \angle ACD$$

أي أن الجزء يساوي الكل وهو محال

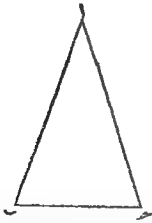
$\therefore$  لا يمكن أن يكون  $AB \neq AC$  غير متساويين

أي أن الضلع  $AB = AC$  وهو المطلوب

نتيجة — المثلث المتساوي الزوايا متساوي الأضلاع

### ملاحظة على نظرية ٥ ٦ ٦

يمكن تحقيق هاتين النظريتين عملاً وذلك بأن نرسم مثلثاً متساوي الساقين على قطعة من الورق



ثم نقصه منها ونقلب وضعه الأصلي  
فإذا وضعناه في مكانه الخالي الذي كان  
يشغله أولاً شغل تماماً  
فإننا فرضنا أن  $\angle \alpha = \angle \beta$  كان الوضع  
الأصلي للمثلث  $\alpha \beta \gamma$  وإن  $\alpha \gamma = \beta \gamma$   
هو عين المثلث مقلوب الوضع نرى أنه  
عند تطبيق النقطة  $\alpha$  على القطر  $\beta$   
كما في نظرية ٥ تقع النقطة  $\beta$  على  
النقطة  $\gamma$  والنقطة  $\gamma$  على النقطة  $\alpha$

ونرى كما في نظرية ٦ أنه عند تطبيق النقطة  $\beta$  على النقطة  $\alpha$  والنقطة  $\alpha$  على النقطة  $\beta$   
وفي كلتا الحالتين نرى أن المثلث المقلوب وضعه انطبق على الأصلي وعلى ذلك فالضلع والزوايا في الجهة  
اليمنى من المثلث مساويان للضلع والزوايا في الجهة اليسرى منه

(ملاحظة على النظرية وعكسها)

يشمل منطوق كل نظرية ركنين الأول يدل على الشروط المعلومة وهو ما يعبر عنه بالفرض والثاني  
يدل على ما يطلب البرهنة عليه ويعبر عنه بالناتج

فمثلاً في منطوق نظرية ٥ الفرض هو أن في  $\alpha \beta \gamma$  الضلع  $\alpha \gamma = \beta \gamma$  الضلع  $\alpha \beta$

وبواسطة هذا الفرض يطلب البرهنة على أن  $\angle \alpha = \angle \beta$  وهذا هو الناتج

فإن عكسنا الأمر وجعلنا فرض نظرية ناتجاً وناتجها فرضاً حصلنا على نظرية أخرى تسمى عكس الأولى

فمثلاً في نظرية ٥ الفرض هو أن  $\angle \alpha = \angle \beta$

والناتج هو أن  $\alpha \gamma = \beta \gamma$

وفي نظرية ٦ الفرض هو أن  $\alpha \gamma = \beta \gamma$

والناتج هو أن  $\angle \alpha = \angle \beta$

ومن ذلك نرى أن نظريتي ٥ ٦ متعاكستان لأن فرض الأولى ناتج الثانية وفرض الثانية ناتج الأولى

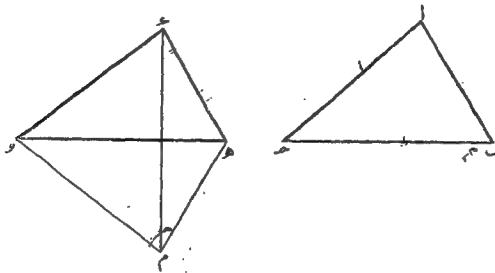
هذا ويبين أن نلاحظ أننا في نظرية ٦ لم تتبع طريقة البرهنة على صحة الناتج قسمة بل أثبتنا الدليل  
على عدم إمكان غير الصحة إذ لو سلمنا بنير صحة المطلوب من النظرية لحصلنا على ناتج غير ممكن عقلاً  
وتسمى هذه الطريقة بطريقة البرهان المؤدى إلى خلاف الفرض وهي مستعملة كثيراً في الهندسة لاسيما

في عكس بعض ما يتقدم من النظريات

ولا يلزم من كون النظرية صحيحة أن يكون عكسها كذلك (راجع صفحة ٢٨)

### نظرية ٧

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى كل ضلع من أحدهما نظيره من الآخر



اذا فرضنا أن  $ا ب ح$  و  $د ه و$  مثلثان فيهما

$$ا ب = د ه$$

$$ا ح = د و$$

$$ب ح = ه و$$

فانه يطلب إثبات أن هذين المثلثين متساويان من تمام الوجوه

البرهان - نتصور وضع المثلث  $ا ب ح$  تحت المثلث  $د ه و$  على شرط أن ينطبق الضلع  $ب ح$  على مساويه  $ه و$  ويأخذ الضلع  $ا ب$  الوضع  $م ه$  والضلع  $ا ح$  الوضع  $م و$  ثم نصل  $د م$ .

$$د ه = ه م$$

$$د ه م = د ه م \quad \therefore \quad (\text{نظرية ٥})$$

$$د م = م و$$

$$د م و = د م و \quad \therefore$$

وعلى ذلك فالزاوية الكلية  $ه د و =$  الزاوية الكلية  $ه م و$

$$د ه و = د ه م \quad \text{أى أن}$$

$$د ه و = د ه م \quad \text{وفى}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{ب ه} = \text{ا د} \\ \text{د س} = \text{ا ح} \\ \text{ك د ب ا} = \text{ا د ه ك} \end{array} \right\} \text{من حيث ان}$$

∴ هذان المثلثان متساويان من عامة الوجوه (نظرة ٤) وهو المطلوب

شبهه - في هذه النظرية

$$\begin{array}{l} \text{الفرض هو} \quad \text{ا د} = \text{ب ه} \quad \text{د س} = \text{ا ح} \quad \text{ه د} = \text{ا د} \\ \text{والنتيجة هو} \quad \text{د ك} = \text{ا د} \quad \text{د س} = \text{ا د} \quad \text{ك د} = \text{ا د} \end{array}$$

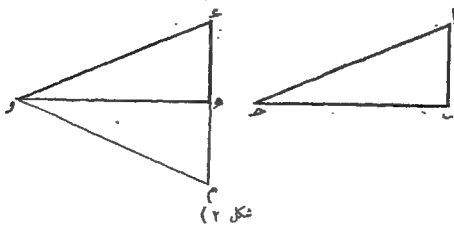
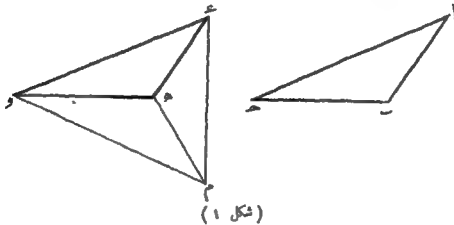
والمثلثان متساويان في المساحة

ونرى مما تقدم أن الزوايا التي يراد البرهنة على تساويها تعادل أضلاعاً مفروضاً تساويها

ملاحظة ١ - نرى أن المستقيم م في النظرية المتقدمة وقع داخل الشكل ويجوز أن يكون له وضع آخر وذلك في حالتين

الأولى : أن يقع المستقيم م خارج الزاويتين ه د و ب ه م وبأن كان المثلثان منفرجى الزاوية كما في شكل ١

والثانية : أن ينطبق المستقيم م على كل من ه د و ب ه م وبأن كان المثلثان قائمى الزاوية كما في شكل ٢



وفي البرهنة على النظرية المتقدمة اذا كانت المثلثان قائمي الزاوية أو متفرجيهما يمكن عدم مراعاة هذه الحالة وذلك اذا اخترنا تطبيق أكبر الأضلاع في كل من المثلثين فيقول الأمر إذن الى أن المستقيم  $ms$  يقع داخل الشكل كما تقدم في شكل النظرية

ملاحظة ٢ — يقال إن المثلثين متساويان في الزوايا اذا تساوت كل زاوية من أحدهما نظيرتها من الآخر وعلى ذلك اذا تساوى في المثلثين كل ضلع من أحدهما نظيره من الآخر فالمثلثان متساويان في الزوايا على التاميد أن بين عكس هذه النظرية ويرسم شكلا يبين فيه أنه لا يلزم أن يكون العكس صحيحا تنبيه — من المستحسن أن يدرس بعد هذه النظرية الدعاوى العملية ١ — ٥ وكذلك عملية ٨ (راجع صفحة ٧٥) لأن في براهينها ايضا لا تطابق المثلثين

## تمارين على تطابق المثلثين في نظريتي ٤ و ٧

(مسائل نظرية)

- ١- برهن على أن المستقيم الواصل من رأس المثلث المتساوي الساقين الى وسط قاعدته (أولا) ينصف زاوية الرأس (ثانيا) يكون عمودا على القاعدة
- ٢  $\Delta ABC$  معين (وهو شكل رباعي أضلاعه متساوية) برهن على أنه ان وصلنا القطر  $AC$  يحدث (أولا) ان  $\angle A = \angle B$  (ثانيا) ان  $AC$  ينصف كلا من زاويتي  $B$  و  $A$
- ٣ اذا كان في الشكل الرباعي  $ABCD$  كل ضلعين متقابلين متساويان أعني أن  $AB = DC$  و  $AD = BC$  فبرهن على أن  $\angle A = \angle B$  و  $\angle C = \angle D$  (بواسطة نظرية ٧)
- ٤ المثلثان  $ABC$  و  $DEF$  متساوي الساقين ومتحدتا القاعدة  $BC$  برهن (بواسطة نظرية ٧) على أن  $\angle A = \angle D$  (أولا) في حالة ما اذا كان المثلثان في جهة واحدة من القاعدة (وثانيا) في حالة ما اذا كانا في جهتيها
- ٥ المثلثان  $ABC$  و  $DEF$  متساوي الساقين ومتحدتا القاعدة  $BC$  ومرسومان عليهما كل في جهة من جهتيها برهن على أنه لو وصلنا  $AD$  لكان منصف لكل من زاويتي  $B$  و  $C$
- ٦ المطلوب اثبات أن المستقيمين الواصلين من طرفي قاعدة مثلث متساوي الساقين الى منتصفيه ساقية متساويان
- ٧ اذا فرضت نقطتان على قاعدة مثلث متساوي الساقين وكانتا متساويتى البعد عن طرفي القاعدة فانهما تكونان متساويتى البعد عن رأس المثلث
- ٨ برهن على أن المثلث الحادث من توصيل منتصفات اضلاع المثلث المتساوي الأضلاع يكون متساوي الأضلاع
- ٩ المثلث  $ABC$  متساوي الساقين فيه  $\angle A = \angle B$  فاذا نصفنا كلا من الزاويتين  $B$  و  $C$  بالنصفين  $M$  و  $N$  حدث أن  $AM = BN$  (أولا)  $\angle M = \angle N$  (ثانيا)  $AN$  ينصف الزاوية  $B$
- ١٠ برهن على أن قطري المربعين (راجع تمرين ٢) ينصف كل منهما الآخر ويكونا متعامدين
- ١١ المثلث  $ABC$  متساوي الساقين فيه  $\angle A = \angle B$  فاذا مددنا الساق  $BA$  من جهة  $A$  على استقامته الى  $D$  وكذلك مددنا  $CA$  من جهة  $A$  على استقامته الى  $E$  على شرط أن  $AD = AE$  ثم وصلنا  $BD$  و  $CE$  حدث أن  $BD = CE$

## تمارين على المثلثات

(عددية وتخطيطية)

١ المطلوب رسم المثلث  $abc$  الذى طول ضلعه  $a = ٥$  سنتيمترات والضلع  $b = ٥,٥$  من السنتيمترات  $c = ٣,٦$  من السنتيمترات وقياس كل من زواياه وإيجاد مقدار مجموعها

٢ فى المثلث  $abc$  الضلع  $a = ٧,٥$  من السنتيمترات  $b = ٧$  سنتيمترات  $c = ٦,٥$  من السنتيمترات والمطلوب رسم العمود النازل من  $b$  على  $a$  وقياسه

٣ المطلوب رسم المثلث  $abc$  الذى ضلعه  $a = ٦$  سنتيمترات  $b = ٦$  سنتيمترات  $c = ٦$  سنتيمترات  $d = ٦٥$  وأثبت (نظرياً وعملياً) أن أى مثلثين تتوفر فيهما هذه القروض يتحدان مساحةً وشكلاً

٤ المطلوب رسم المثلث على فرض أن  $b = ٤$  سنتيمترات  $c = ٥$  سنتيمترات  $d = ١٠$  وإيجاد طول الضلع  $a$  بقياسه وكذا قياس كل من الزاويتين  $b$  و  $c$

ارسم مثلثاً آخر باستعمال المقادير التى وجدتها لكل من  $a$  والزاويتين  $b$  و  $c$  وقس فيه الضلعين  $b$  و  $c$  و  $d$  واذكر ماستنتج من ذلك

٥ سلم مرتكز على حائط تبعد قاعدته عن هذا الحائط بمقدار  $٢,٤$  من الأمتار ورأسه على شباك مرتفع عن الأرض بقدر  $٧$  أمتار والمطلوب رسم شكل يبين فيه وضع السلم على شرط أن يكون مقياس الرسم سنتيمتراً واحداً لكل متر وإيجاد طول السلم بقياسه من الرسم

٦ مشى شخص من نقطة معلومة متجهاً نحو الشمال  $٩٩$  متراً ثم اتجه نحو الشرق فمشى  $٢٠$  متراً والمطلوب إيضاح ذلك برسم (يكون مقياسه سنتيمتراً لكل عشرة أمتار) وإيجاد بعد الشخص عن نقطة القيام بقياس هذا البعد بأقرب ما يمكن من الحقيقة

٧ طول ظل قضيب من الخشب عند ما تكون الشمس فوق الأفق بقدر  $٢٠^\circ$  هو  $١٠$  أمتار والمطلوب رسم شكل يبين ذلك ويكون مقياس الرسم فيه سنتيمتراً لكل متر ثم إيجاد طول القضيب التقريبي بقياسه من الرسم المذكور

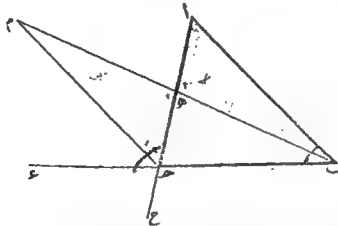
٨ نخرج مساح من النقطة المعينة  $a$  واتجه نحو الشرق ومشى  $١٥٠$  متراً حتى وصل إلى نقطة  $b$  ثم اتجه نحو الشمال ومشى  $٣٠٠$  متراً حتى وصل إلى نقطة  $c$  ثم اتجه نحو الغرب ومشى  $٤٥٠$  متراً فوصل إلى  $d$  والمطلوب عمل الرسم البياني لسير هذا الرجل (مقياس الرسم سنتيمتراً لكل  $٥٠$  متراً) وإيجاد بعد  $d$  عن  $a$  بالتقريب وكذا قياس  $d$  و  $a$  بمبدأ الاتجاه  $d$  بالنسبة إلى  $a$

٩ القطعتان  $b$  و  $c$  واقعتان على شاطئ نهر مستقيم ومبتعدتان بقدر  $٣٦٠$  متراً فإذا كانت  $a$  سفينة راسية فى النهر  $d$  و  $a$  تساوى  $٣٣$  و  $d$  و  $b$  و  $c$  و  $a$  فانه يراد عمل الرسم البياني الذى يستدل منه بوجه التقريب على بعد السفينة عن  $b$  و  $c$  وكذا بعدها عن أقرب نقطة على الشاطئ المذكور

١٠ لزم أثناء مسح مزرعة أن يعرف البعد بين القطعتين  $a$  و  $b$  وكان بينهما بحيرة يتعذر المرور فيها وبذلك تعذر قياس البعد بينهما مباشرة فأخذ المساح نقطة ثالثة وهى  $c$  يمكنه أن يصل منها إلى كل من  $a$  و  $b$  فوجد أن  $a = ٢٤٥$  متراً  $b = ٣٢٠$  متراً وأن  $d = ٤٢$  والمطلوب عمل رسم يبين البعد التقريبي بين القطعتين المفروضتين

### نظرية ٨

إذا مد أحد أضلاع المثلث على استقامته كانت الزاوية الخارجة الحادثة أكبر من أى زاوية داخلية ماعدا المجاورة لها



إذا فرضنا أن  $\angle \alpha$  مثلث ومددنا ضلعه  $\beta$  على استقامته الى  $\gamma$   
فانه يطلب اثبات أن الزاوية الخارجة  $\alpha$  أكبر من كل من  $\angle \beta$  و  $\angle \gamma$   
لذلك نعرض أن  $\alpha$  منتصف  $\beta$

ونصل  $\beta$  و  $\gamma$  ونعده على استقامته وتأخذ على امتداده البعد  $\beta = \gamma$  ثم نصل  $\beta$  و  $\gamma$   
البرهان - في المثلثين  $\alpha \beta \gamma$  و  $\alpha \gamma \beta$

$$\alpha \beta = \alpha \gamma$$

$$\beta \gamma = \gamma \beta$$

$$\angle \alpha \beta \gamma = \angle \alpha \gamma \beta$$

فتكون  $\angle \alpha \beta \gamma = \angle \alpha \gamma \beta$  ينطبق  $\alpha \beta$  على  $\alpha \gamma$  (نظرية ٤)

$$\beta \gamma = \gamma \beta$$

$$\angle \alpha \beta \gamma = \angle \alpha \gamma \beta$$

$$\angle \alpha \beta \gamma = \angle \alpha \gamma \beta$$

وبالطريقة عينها يقال إذا مد  $\alpha$  على استقامته الى  $\gamma$  ووصل من  $\alpha$  الى منتصف  $\beta$  بمستقيم

تسهل البرهنة على أن  $\angle \alpha$  أكبر من  $\angle \beta$  و  $\angle \gamma$

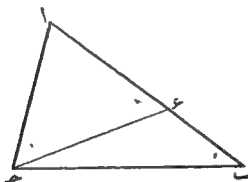
$$\angle \alpha \beta \gamma = \angle \alpha \gamma \beta$$

$$\angle \alpha \beta \gamma = \angle \alpha \gamma \beta$$



### نظرية ٩

الضلع الأكبر في أي مثلث تقابله الزاوية الكبرى



في المثلث  $ABC$  الضلع  $AB$  أكبر من الضلع  $AC$

ويطلب البرهنة على أن  $\angle C$  أكبر من  $\angle B$

لذلك نأخذ على  $AB$  البعد  $AD = AC$  ونصل  $D$

البرهان - من حيث أن  $AD = AC$

(نظرية ٥)  $\therefore \angle ADC = \angle ACD$

ولكن  $\angle ADC$  خارجة بالنسبة إلى المثلث  $BCD$

$\therefore \angle ADC$  أكبر من  $\angle BCD$  التي هي  $\angle B$

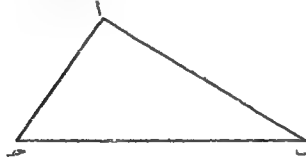
$\therefore \angle C$  أكبر من  $\angle B$

ومن باب أولى  $\angle A$  أكبر من  $\angle B$  وهو المطلوب

ملاحظة - طريقة البرهان في النظرية الآتية تعرف بطريقة الاستقصاء ويمكن اتباعها إذا لم يكن  
 ب. من صحة حالة واحدة من عدة حالات مفروضة فتقو البرهان على عدم صحة كل الحالات ما عدا  
 أحداها تثبت صحة هذه الحالة

## نظرية ١٠

الزاوية الكبرى في أى مثلث يقابلها الضلع الأكبر



في المثلث  $أ ب ج$  الزاوية  $أ$  أكبر من الزاوية  $ب$

ويطلب البرهنة على أن الضلع  $أ ب$  أكبر من الضلع  $أ ج$

البرهان — أن لم يكن  $أ ب$  أكبر من  $أ ج$

فإما أن يساويه وإما أن يكون أصغر منه

فإن كان  $أ ب = أ ج$

لزم أن تكون  $أ ب ج = أ ج ب$  (نظرية ٥)

وهذا خلاف الفرض

وإن كان  $أ ب$  أصغر من  $أ ج$

لزم أن تكون  $أ ج ب$  أصغر من  $أ ب ج$

وهذا خلاف الفرض أيضا

وعلى ذلك فالضلع  $أ ب$  لا يمكن أن يساوى  $أ ج$  كما أنه لا يمكن أن يكون أصغر منه

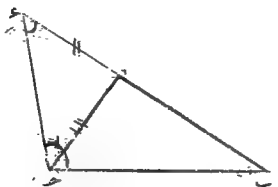
∴  $أ ب$  يجب أن يكون أكبر من  $أ ج$  وهو المطلوب

(للتأريين على نظريتي ٩ و ١٠ راجع صفحة ٣٨)



# نظرية ١١

أى ضلع في المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين



إذا فرضنا أن  $AB > AC$  مثلث

فانه يطلب اثبات أن أى ضلع فيه أصغر من مجموع ضلعيه الآخرين

فإذا كان  $AB > AC$  أكبر ضلع في المثلث فانه يكفى أن يبرهن على أن مجموع  $BA > AC$  أكبر منه

ولذلك نمد  $BA$  على استقامته وتأخذ على امتداده البعد  $AD = AC$  ثم نصل  $DC$

البرهان — من حيث أن  $AD = AC$

∴  $ADC = DAC$  (نظرية ٥)

ولكن  $ADC > ADB$  أكبر من  $ADC$

∴  $ADC > ADB$  أكبر من  $ADC$  أى  $DB > DC$

وعلى ذلك ففى  $ADC$  يكون

(نظرية ١٠)  $AD > DC$  أكبر من  $DC$

لكن  $AD = BA$  مجموع  $BA > AC$

∴  $BA > AC$  أصغر من مجموع  $BA > AC$  وهو المطلوب

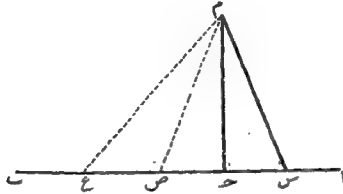
تنبيه — صحة هذه النظرية واضحة بلا اثبات وانما أوردنا البرهان السابق تحريفاً على ما تقدم من النظريات

أما وضوح صحة النظرية فلا أنه إذا تحركت نقطة من  $B$  إلى  $C$  على المستقيم  $BC$  تقطع مسافة أقصر مما لو تحركت من  $B$  إلى  $A$  ثم من  $A$  إلى  $C$  وبعبارة أخرى

أقرب بعد بين نقطتين هو المستقيم الواصل بينهما

## نظرية ١٢

العمود هو أقصر المستقيم التي تخرج من نقطة مفروضة الى مستقيم معلوم



اذا فرضنا أن  $م$  هو العمود النازل من النقطة المفروضة  $م$  على المستقيم المعلوم  $ا ب$  وأن  $م س$  مائل تما وأصل منها الى  $ا ب$

فانه يطلب اثبات ان  $م$  أقصر من  $م س$

البرهان — في المثلث  $م س ح$

من حيث ان  $م$   $ح$  من قائمة

$\therefore$   $م س$   $ح$  أصغر من قائمة (نتيجة نظرية ٨)

أي أن  $م س$   $ح$  أصغر من  $م س$

$\therefore$   $م$   $ح$  أصغر من  $م س$  (نظرية ١٠)

وهو المطلوب

نتيجة ١ — وبالعكس : من حيث انه من نقطة مفروضة خارج مستقيم لا يمكن أن ينزل إلا عمود واحد عليه وأنه لا يمكن أن يوجد إلا مستقيم واحد أقصر من جميع المستقيم الخارجة منها الى المستقيم المعلوم يتنج أنه

اذا كان  $م$  أقصر المستقيم الخارجة من  $م$  الى  $ا ب$  فان

$م$  هو العمود النازل من  $م$  على  $ا ب$

نتيجة ٢ — المثلثان  $م س ٦$   $م ح ٦$  متساويان اذا لاقيا المستقيم المعلوم على بعدين متساويين

من موقع العمود

أي أنه لو كان البعد  $م س$  = البعد  $م ح$  لكان  $م س$  =  $م ح$

لأن المثلثين  $م س ٦$   $م ح ٦$  يمكن البرهنة على تطابقهما (نظرية ٤)

ومن فلك يتنج ان  $م س$  =  $م ح$

نتيجة ٣ — أى مائتين يخرجان من النقطة المفروضة ويلاقيان المستقيم المعلوم على بعدين مختلفين من موقع العمود يكونان مختلفين وأكبرهما مالاقي المستقيم على بعد أكبر من الموقع المذكور

أى أنه إذا كان ح ع أكبر من ح ص فلما تل م ع أكبر من المائل م ص

لأن د م ص ح حله

∴ د م ص ع مفرجة

∴ د م ص ع أكبر من د م ع ص

∴ م ع أكبر من م ص

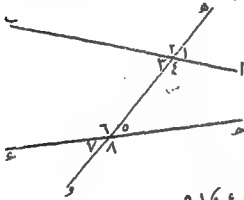
## تساوين على اختلاف الأضلاع والزوايا في المثلث

- ١ في المثلث القائم الزاوية الوتر أكبر الأضلاع
  - ٢ أكبر ضلع في المثلث يصنع مع كل من ضلعيه الآخرين زاوية حادة
  - ٣ إذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها إلى طرفي أحد أضلاعه بمستقيمين كان مجموعهما أصغر من مجموع ضلعي المثلث المحيطين بهما
  - ٤  $a > b$  مثلث متساوي الساقين فيه  $a = b$   $a$  مدت قاعدته  $b$  على استقامتها واخذ على امتدادها نقطة ما مثل  $d$  برهن على أن  $a > b$  أكبر من كل من ساق المثلث
  - ٥ انا كان أكبر الأضلاع وأصغرهما في أي شكل رباعي متقابلين كان كل من الزاويتين المجاورتين للضلع الأصغر أكبر من التي تقابلها في الشكل المذكور
  - ٦ في أي مثلث مثل  $a > b$  انا لم يكن  $a > b$  أكبر من  $a$  فان أي مستقيم واصل من الرأس  $a$  إلى أي نقطة في القاعدة  $b > c$  أصغر من  $a$
  - ٧ انا كان  $b > c$  في المثلث  $a > b$  منصف  $d > c$   $c$  منصف  $d > c$  وكان  $a > b$  أكبر من  $c$  كان  $b > c$  أكبر من  $c$
  - ٨ أي ضلع في المثلث أكبر من الفرق بين الضلعين الآخرين
  - ٩ مجموع أبعاد أي نقطة عن رؤوس مثلث أكبر من نصف مجموع أضلاعه
  - ١٠ مجموع أضلاع الشكل الرباعي أكبر من مجموع قطريه
  - ١١  $a > b$  مثلث نصفنا زاوية رأسه  $a$  بمستقيم يقابل القاعدة  $b > c$  في  $s$  برهن على أن  $a > b$  أكبر من  $b$  وأن  $a > b$  أكبر من  $c$  ومن ذلك استنبط برهان آخر لنظرية ١١
  - ١٢ انا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها إلى رؤوس زواياه بمستقيمات كان مجموع هذه المستقيمات أصغر من مجموع أضلاعه
  - ١٣ برهن على أن مجموع قطري الشكل الرباعي أصغر من مجموع المستقيمات الأربعة الواصلة من أي نقطة مفروضة إلى رؤوس الشكل وبين الحالة التي لا يصح فيها ذلك
  - ١٤ مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من ضعف المستقيم المتوسط المنصف للضلع الثالث
- [ مد المستقيم المتوسط على استقامته وأكمل الرسم كما في نظرية ٨ ]
- ١٥ مجموع المستقيمات المتوسطة في أي مثلث أصغر من مجموع أضلاعه

## في المتوازيات

تعريف — المستقيمان المتوازيان هما اللذان يكونان في مستو واحد ولا يتلاقيان مهما امتدتا  
تنبه — يجب أن تكون المستقيمان المتوازيان في مستو واحد دائماً فإنا إذا رسمنا مستقيمين أحدهما  
في مستوى منضدة مثلاً والآخر في مستوى الأرض فإن هذين المستقيمين لا يلزم أن يلتقيا مهما امتدنا مع  
جواز كونهما غير متوازيين

بديهية — لا يمكن أن يكون المستقيمان المقاطعان موازيين لثالث وبعبارة أخرى  
لا يمكن أن يمد من نقطة مفروضة إلا مستقيم واحد يوازي آخر معلوما وتعرف هذه ببديهية “بلافيير”  
تعريف — إذا قطع المستقيم  $هـ$  والمستقيمين  $ا$   $ب$   $ج$  فإنه يحدث من هذا التقاطع ثمانية زوايا  
تتميز بأسماء خاصة



في الشكل

الزوايا ١، ٢، ٣، ٤ تسمى خارجية

والزوايا ٥، ٦، ٧، ٨ تسمى داخلية

والزاويتان ٤ و ٥ تسميان متبادلتين

وكذلك الزاويتان ٣ و ٥

ويقال للزاويتين ٦ و ٧ انهما متناظرتان وكذلك ٣ و ٤ و ٨ و ٦

## نظرية ١٣

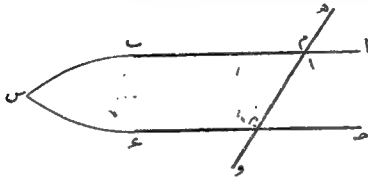
إذا قطع مستقيم مستقيمين وحدث من ذلك

(أولاً) أن أى زاويتين متبادلتين متساويتان

أو (ثانياً) أن أى زاويتين متناظرتين متساويتان

أو (ثالثاً) أن مجموع أى زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع يساوى قائمتين

كان المستقيمان في أى حال من الأحوال الثلاثة متوازيين



(أولاً) إذا فرضنا أن المستقيم هـ يقطع المستقيمين ا ب و جـ في ٦ و ٧ وكانت الزاويتان

المتبادلتان م ٦ و ن ٧ متساويتين

فانه يطلب اثبات أن ا ب يوازي جـ

البرهان — ان لم يكن ا ب متوازيين فانهما يتلاقيان اذا امتدنا من جهة ب ٦ و ا ٦

فلو أمكن تلاقيهما في النقطة س اذا امتدنا من جهة ب ٦ مثلاً لحدث أن س م مثلث مد أحد أضلاعه س م على استقامته الى ا

∴ الزاوية الخارجة م ٦ أكبر من م ٧

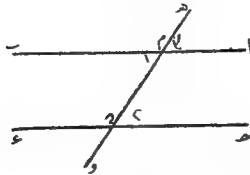
وهذا خلاف الفرض إذ أنهما متساويتان

وقد نشأ الخلاف من فرضنا تلاقى المستقيمين ا ب و جـ في س

∴ لا يمكن تلاقيهما مهما امتدنا في هذه الجهة

وبالطريقة عينها يثبت أنه لا يمكن تلاقيهما مهما امتدنا في جهة ا ٦

∴ المستقيم ا ب يوازي المستقيم جـ



(ثانيا) اذا فرضنا ان  $د ه م = ا م د$  المناظرة لها  $د م د$

فانه يطلب اثبات ان  $ا ب$  يوازي  $و$

البرهان - من حيث ان  $د ه م = ا م د$

ومن حيث ان  $د م د = ا م د$  لتقابلهما بالرأس

$د م د = د م د$   $\therefore$

وهاتان الزاويتان متبادلتان

نظر  $ا ب$  يوازي  $و$

(ثالثا) اذا فرضنا ان مجموع الزاويتين  $د م د + د م د$  يساوي قائمتين

فانه يطلب اثبات ان  $ا ب$  يوازي  $و$

البرهان - من حيث ان  $د م د + د م د = قائمتين$

$د م د + د م د = د م د + د م د$   $\therefore$

ويطرح  $د م د$  من كل من طرفي هذه المتساوية ينتج ان الباقيين متساويان

أي ان  $د م د = د م د$

ومن حيث ان هاتين الزاويتين متبادلتان

$\therefore$   $ا ب$  يوازي  $و$  وهو المطلوب

تعريف - اذا قطع مستقيم مستقيمين أو جملة مستقيمة فانه يسمى بالقاطع

فتلا المستقيم  $و م د$  في الشكل المتقدم قطع كلا من  $ا ب$  و  $د م د$  فيقال له القاطع

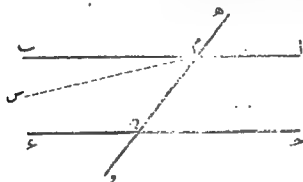
### نظرة ١٤

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين يحدث

(أولاً) أن كل زاويتين متبادلتين متساويتان

(ثانياً) أن كل زاويتين متناظرتين متساويتان

(ثالثاً) أن مجموع كل زاويتين داخليتين في جهة واحدة من القاطع يساوي قائمتين



إذا فرضنا أن  $ا ب$  و  $ج د$  مستقيمان متوازيان وأن المستقيم  $هـ و$  قاطع لهما فإنه يطلب اثبات

(أولاً) أن  $د ب = ا م$  = المتبادلة مهما  $هـ و$

(ثانياً) أن  $د هـ = ا م$  = المتناظرة لهما  $هـ و$

(ثالثاً) أن مجموع الزاويتين  $ا م ٦ د ٥$  = قائمتين

البرهان - (أولاً) أن لم تكن  $د ب د م = د م د$

فترض أن  $د س م د هـ$  التي تساوي  $د م د$  وهاتان الزاويتان متبادلتان

∴  $م س$  يوازي  $د هـ$  (نظرية ١٣)

ولكن  $ا ب$  يوازي  $د هـ$  بالفرض

∴ أمكن وجود مستقيمين متقاطعين يوازيان ثالثاً وهو  $د هـ$  وهذا محال (بديهية بلايفير)

∴  $د ب د م$  لا يمكن إلا أن تساوي  $د م د$

أي أن الزاويتين المتبادلتين  $د م ٦ د ب$  متساويتان

(ثانياً) من حيث أن  $د هـ = ا م د$  للتقابل بالرأس

$٦ د ب د م = د م د$  بالتبادل كما تقدم

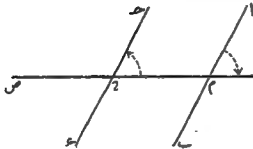
∴  $د هـ = ا م د$  وهما متناظرتان



(ثالثا) من حيث أن  $\angle م د ا = \angle م د ب$  بالتناظر كما تقدم  
فلو أضفنا إلى كل من طرفي هذه المتساوية  $\angle م ا د$  لحدث أن الحاصلين متساويان  
أي أن  $\angle م د ا + \angle م د ب = \angle م ا د + \angle م د ب$   
لكن  $\angle م د ا + \angle م د ب = \angle م د ا ب$  قائمتين  
∴ مجموع الزاويتين  $\angle م ا ب$   $\angle م د ب$  يساوي قائمتين وهو المطلوب

### إيضاح المتوازيات بطريقة الدوران

انجاء أى مستقيم بالنسبة إلى آخر معلوم يعين بالزاوية التي يصنعها معه  
فتلنا اتجاه المستقيم  $ا ب$  بالنسبة إلى المستقيم المعلوم من  $ص$  يعين بالزاوية  $\angle م ا ص$



فإذا فرض أن  $\angle م ا ب$   $\angle م د ب$  مستقيمان  
متوازيان فإن  $\angle م ا د = \angle م د ب$   
بالتناظر أى أن  $\angle م ا ب$   $\angle م د ب$  يصنعان مع  
المستقيم المعلوم من  $ص$  زاويتين متساويتين  
ومن ذلك نستنتج الفكرة التي تؤدي إلى  
المستقيمتين المتوازيتين وهي اتحادهما في الاتجاه  
مع اختلافها في الوضع

وذلك اذا تصورنا أن  $ا ب$  دار حول  $م$  بقدر  $\angle م ا د$  من فانه ينطبق على  $ص$   
ثم اذا تصورنا دورانه ثانيا من هذا الوضع من  $ص$  حول نقطة أخرى مثل  $د$  في الجهة المضادة  
لدورانه الأول حتى صنع الزاوية من  $د$  التي تساوي  $\angle م ا د$  فانه يأخذ الوضع  $د$  وهو خلاف  
الأول ويرجع فيه بهاتين الدوريتين المتساويتين المتضادتين إلى اتجاهه الأول بعينه

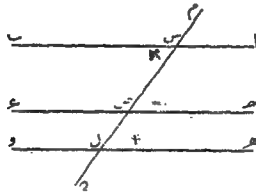
فرض عملي — اذا فرض في الشكل المتقدم أن  $ا ب$  مستقيم ثابت وأن  $د$  نقطة ثابتة وأن  $ص$   
مستقيم آخر يدور حول النقطة  $د$  وأن  $ص$   $د م$  من قاطع مامار بالنقطة المذكورة فانه عند دوران  
 $د$  حولها لا بد أن يكون له وضع واخيه فيه تكون  $\angle م د ب = \angle م ا د$  = الزاوية الثابتة  $\angle م ا د$  من  
وفي هذه الحالة يكون  $د$  موازيا  $ا ب$

وعلى ذلك يمكن أن نعرض دائما مد مستقيم من نقطة مفروضة يوازي آخر معلوما

نتيه — اذا تحركت نقطة على المستقيم  $ا ب$  من  $ا$  إلى  $ب$  ثم من  $ب$  إلى  $ا$  فانه يقال لهاتين الحركتين  
انهما في اتجاهين متضادين

# نظرية ١٥

المستقيمان الموازيان لثالث متوازيات



إذا فرضنا أن كلام من  $ا ب ٦ ٥$  يوازي  $هـ و$

فانه يطلب اثبات أن  $ا ب$  يوازي  $د$

لذلك نرسم  $د$  قاطعا للمستقيمان  $ا ب$  في  $س ٦ ٥$  في  $و$  في  $ل$

البرهان — من حيث أن  $ا ب ٦ ٥$  و متوازيان  $د ٦ ٥$  قاطع لهما

$\therefore$   $د ب س ل = د س ل هـ$  بالتبادل

ومن حيث أن  $د ٦ ٥$  و متوازيان  $د ٦ ٥$  قاطع لهما

$\therefore$   $د م ص ٥ = د س ل هـ$  بالتناظر

$\therefore$   $د ب س ص = د م ص ٥$

ومن حيث أن هاتين الزاويتين متبادلتان

$\therefore$   $ا ب$  يوازي  $د$  وهو المطلوب

ملاحظة — إذا كان المستقيم  $هـ و$  واقعا بين المستقيمين  $ا ب ٦ ٥$  فان النظرية لا تحتاج الى

برهان لأنه لا يتصور أن يتلاقى مستقيمان لا يلاقى كل منهما مستقيما واقعا بينهما

ويمكن أن يبرهن على صحة هذه النظرية ببساطة "بلاغير" التي هي عكسها بأن يقال ان لم يكن

$ا ب ٦ ٥$  متوازيين تلاقيا و يترتب على ذلك وجود مستقيمين متقاطعين وموازيين لثالث وهذا حال

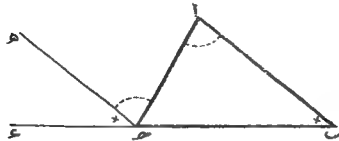
وعلى ذلك فالمستقيمان  $ا ب ٦ ٥$  لا يلتقيان مهما امتدّا أى أنهما متوازيان

## تمارين على المتوازيات

- ١ في شكل النظرية السابقة المطلوب تقدير درج كل من الزوايا  $\angle$  ص ل ٦ ص ل ه ٦ هل  $\angle$  مع العلم بأن  $\angle$  م د =  $\angle$  ه ه
- ٢ المستقيمان العمودان على ثالث متوازيان
- ٣ اذا قابل مستقيمان متوازيين أو أكثر وكان عمودا على أحدهما فانه يكون عمودا على الأخرى
- ٤ الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية تكونان إما متساويتين وإما متكاملتين
- ٥ المستقيمان  $\angle$  ا ب ٦ و  $\angle$  ب ص ٦ ينصف كل منهما الآخر في م برهن على أنه اذا وصل من ا الى ب ومن د الى ب فان  $\angle$  ا ب ٦ و  $\angle$  ب ص ٦ يكونان متوازيين
- ٦ المستقيم الذي يقطع ساقى مثلث متساوى الساقين ويوازي قاعدته يكون مع الساقين زاويتين متساويتين
- ٧ اذا فرضت نقطة على منتصف أى زاوية ورسم منها مواز لأحد ضلعيها كان المثلث الحادث متساوى الساقين
- ٨ اذا فرضت نقطة مثل م على قاعدة مثلث متساوى الساقين مثل  $\angle$  ا ب ٦ وأقيم منها عمود يقطع  $\angle$  ا في ص وامتداد  $\angle$  ب في ع فانه يطلب البرهنة على أن المثلث ا ص ع متساوى الساقين
- ٩ اذا كان المنصف لزاوية خارجة لمثلث موازيا للضلع المقابل لمجاورتها فان المثلث يكون متساوى الساقين
- ١٠ اذا رسم من نقطة على منتصف زاوية مستقيمان يوازيان ضلعيها وينتهيان بهما فان هذين المستقيمين يكونان متساويين ويكون الشكل الحادث معيناً
- ١١ اذا تقاطع المستقيمان  $\angle$  د ٦ ا ب في نقطة د ونصفت كل من الزاويتين المتجاورتين ا د ٦ ب د ٦ ثم فرضت نقطة مامثل م على د ورسم منها مستقيم مواز ا ب وقاطع المنصفين في ص ٦ فانه يراد إثبات أن م ص = م د
- ١٢ القضبان ا ب ٦ ب ص يتحرك أحدهما حول الود م والآخر حول الود ه ويدور الاثنى ١٢ دورة في الدقيقة والثانى ١٠ دورات في الدقيقة فاذا ابتداء يوران من وضعين كانا فيهما متوازيين وفى اتجاه واحد فما هو الزمن الذى يمضى حتى يكونا متوازيين مرة أخرى وذلك (أولاً) فى احالة ختلاف اتجاهيهما و (ثانياً) فى حالة اتحاده

## نظرية ١٦

مجموع زوايا المثلث الداخلة يساوى زاويتين قائمتين



إذا فرضنا أن  $\angle ا ب ج$  مثلث

فانه يطلب اثبات أن مجموع الزوايا  $\angle ا ب ج + \angle ب ا ج + \angle ج ا ب =$  قائمتين

لذلك نمد  $\angle ب ج$  على استقامته الى نقطة  $د$  كما مثل  $د$  ونفرض أن  $هـ ج$  يوازي  $ب ا$

البرهان — من حيث أن  $ب ا ج$   $هـ ج$  متوازيان  $\angle ا ب ج$  قاطع لهما

$\therefore \angle د ا ب = \angle د هـ ا$  بالتبادل

ومن حيث أن  $ب ا ج$   $هـ ج$  متوازيان  $\angle ب ج د$  قاطع لهما

$\therefore \angle د ا ب = \angle د هـ ج$  بالتناظر

$\therefore$  الزاوية الخارجة الكلية  $\angle ا ب ج =$  مجموع الزاويتين الداخلتين  $\angle ا ب ج + \angle ا ج ب$  وبإضافة

$\angle ا ب ج$  الى كل من طرفي هذه المتساوية يحدث أن

$$\angle ا ب ج + \angle ا ب ج = \angle ا ب ج + \angle ا ج ب + \angle ج ا ب + \angle ا ب ج$$

لكن  $\angle ا ب ج + \angle ا ب ج =$  قائمتين

$\therefore$  مجموع الزوايا  $\angle ا ب ج + \angle ب ا ج + \angle ج ا ب =$  قائمتين وهو المطلوب

ملاحظة — نستنتج من سير البرهان المتقدم خلاصة الهامة الآتية وهي أنه

إذا مده أحد أضلاع المثلث على استقامته فإن الزاوية الخارجة الحادثة تساوى مجموع الزاويتين

الداخلتين غير المجاورة

أى أن الزاوية الخارجة  $\angle ا ب ج = \angle ا ب ج + \angle ا ج ب$

(استنتاجات من نظرية ١٦)

١ لو فرض أن  $\angle ب ا ج + \angle ج ا ب + \angle ا ب ج$  لدرج المثلث لحدث أن

$$١٨٠ = ا + ب + ج$$

٢ إذا ساهمت زاويتان من مثلث نظيرتيهما من مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة من المثلث الأول

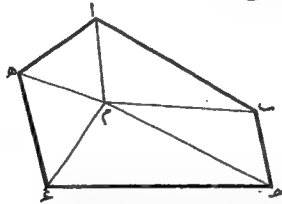
لا بد أن تساوى نظيرتها من المثلث الثانى

- ٣ في المثلث القائم الزاوية زاويتاه الحادتان متتامتان
- ٤ اذا ساوت زاوية في مثلث مجموع زاويتي الأخرين كان المثلث قائم الزاوية
- ٥ مجموع زوايا أى شكل رباعى يساوى أربع قوائم

### تمارين على نظرية ١٦

- ١ كل زاوية من زوايا المثلث المتساوى الأضلاع تساوى ثلثي قائمه أو  $90^\circ$
- ٢ اذا كان المثلث القائم الزاوية متساوى الساقين كانت كل زاوية من زاويتي المتساويتين  $45^\circ$
- ٣ المعلوم مثلث احدى زواياه تساوى  $36^\circ$  والأخرى  $123^\circ$  والمطلوب إيجاد مقدار الزاوية الثالثة وتحقيقه بالقياس
- ٤ ا ب ح مثلث فيه  $\angle د = 111^\circ$   $\angle ب = 6^\circ$   $\angle ج = 2^\circ$  ويراد إيجاد مقدار  $\angle ا$  وتحقيق الناتج بالقياس
- ٥ اذا مدّ الضلع ب ح من المثلث ا ب ح على استقامته الى د وكانت الزاوية الخارجة  $\angle د = 134^\circ$   $\angle ب = 1^\circ$   $\angle ج = 2^\circ$  فانه يطلب إيجاد مقدار كل من الزاويتين الداخلتين الباقيتين
- ٦ في شكل نظرية ١٦ اذا كانت  $\angle د = 118^\circ$   $\angle ب = 6^\circ$   $\angle ج = 51^\circ$  فانه يراد إيجاد مقدار كل من الزاويتين ا ب ح مع تحقيق ذلك بالقياس
- ٧ المطلوب إثبات أن زوايا المثلث تساوى قائمتين بفرض رسم مستقيم يمر برأس المثلث ويوازي القاعدة
- ٨ اذا تقاطع مستقيمان وأقيم على كل عمود فالزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين تساوى الزاوية الحادة المحصورة بين العمودين

نتيجة ١ - مجموع الزوايا الداخلة لأي شكل كثير الأضلاع مضافا إليه أربع قوائم يساوى من القوائم بقدر ضعف عدد الأضلاع



إذا فرضنا أن  $a b c d e$  شكل كثير الأضلاع وأن عدد أضلاعه  $\div$  فإنه يطلب اثبات أن زواياه الداخلة + ٤ قوائم  $= ٢ \div$  من الزوايا القوائم لذلك نرض نقطة  $m$  داخل الشكل ونصل منها إلى رؤوسه بمستقييات فينقسم الشكل بهذه المستقييات إلى مثلثات عددها  $\div$

ومن حيث أن مجموع زوايا كل مثلث  $=$  قائمتين

فمجموع زوايا كل المثلثات  $= ٢ \div$  من القوائم

ولكن زواياها هي زوايا الشكل الداخلة والزوايا المجمعة في نقطة  $m$  التي تساوى ٤ قوائم  
 $\therefore$  زوايا الشكل الداخلة + ٤ قوائم  $= ٢ \div$  من القوائم وهو المطلوب

تعريف - كثير الأضلاع المنتظم أو المضلع المنتظم هو شكل تساوت أضلاعه وزواياه  
 فلذا رمزنا بالحرف  $s$  لمقدار درج كل زاوية من أى مضلع منتظم عدد أضلاعه  $\div$  يحدث أن

$$١٨٠ \times \div = ٣٦٠ + s \times \div$$

(مسألة)

المطلوب إيجاد مقدار زاوية كثير الأضلاع المنتظم إذا كان

(١) سدسا (زاوية ستة أضلاع)

(٢) ثمنا (زاوية ثمانية أضلاع)

(٣) معشرا (زاوية عشرة أضلاع)

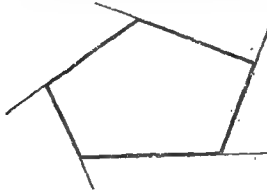
تمارين على نظرية ١٦

(عددية وتخطيطية)

١  $a b c$  مثلث فيه  $b c$  ضعف  $a d$   $6 d$   $c$  ثلاثة أمثال  $d$   $a$  وإراد إيجاد مقدار كل زاوية من زوايا هذا المثلث بالدرج

- ٢ المطلوب إيجاد مقدار كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الساقين بالدرج عند ما تكون  
(أولاً) كل من زاويتي القاعدة مثل زاوية الرأس  
(ثانياً) كل من زاويتي القاعدة أربعة أمثال زاوية الرأس
- ٣ المعلوم مثلث مددت قاعدته على استقامتها في كلتا جهتيها وكانت الزاويتان الخارجتان الحادتان  
٩٤ ٦ ١٢٦ والمطلوب معرفة زاوية الرأس ثم رسم المثلث وتحقيق ذلك بالقياس
- ٤ مجموع زاويتي القاعدة في مثلث ١٦٢° والفرق بينهما ٩٠° ويراد معرفة كل زاوية على حدها
- ٥ اذا ساوت زاويتا القاعدة من مثلث ٨٤° ٦ ٩٢ فانه يراد إيجاد
- (أولاً) زاوية الرأس (ثانياً) الزاوية المحصورة بين منصفى زاويتي القاعدة ثم رسم المثلث وتحقيق ذلك بالقياس
- ٦ ا ب ح مثلث فيه د ب = ٧٤ د ج = ٦٢ مد كل من ا ب ا ج على استقامته ويراد معرفة الزاوية المحصورة بين منصفى الزاويتين الخارجتين الحادتين مع تحقيق ذلك بالرسم
- ٧ شكل رباعي ا ب ج د زاوية ا تساوي ١١٤° والثانية ٥٠ والثالثة ٧٥° ف مقدار الزاوية
- ٨ ا ب ج د شكل رباعي فيه د ب = ٢ ا د ج = ٦ د ج = ٣ ا ب ج د = ٤ ا د ج ف مقدار كل زاوية على حدها
- ٩ احدى زوايا خماس غير منتظم تساوي ٤٠° والثانية ٧٨° والثالثة ١٢٢° والرابعة ١٣٥° ف مقدار الخامسة
- ١٠ اذا كان د رمزاً لعدد أضلاع مضلع منتظم كان مقدار أى زاوية من زواياه يساوى من القوائم بقدر  $\frac{2(2-d)}{3}$  ويراد
- (أولاً) استخراج هذا القانون من نتيجة ١ المتقدمة
- (ثانياً) البرهنة على هذا القانون بدون واسطة النتيجة المذكورة وذلك بأن يوصل من أحد رؤوس الشكل الى رؤوسه الأخرى بمستقيمات (ماعدا الرأسين المجاورين) وبذلك ينقسم الشكل الى مثلثات عددها د - ٢
- ١١ كم أضلاع الشكل المنتظم انا كانت زاويته (أولاً) ١٠٨ (ثانياً) ١٥٦°
- ١٢ الأشكال المنتظمة التي يمكن وضعها بحيث تشترك جميعاً في رأس ويتحد كل اثنين منها في ضلع ويتكون من وضعها على هذه الكيفية سطح مستو لا يخرج عن
- (أولاً) مثلثات متساوية الأضلاع (ثانياً) مربعات (ثالثاً) مسدسات منتظمة

نتيجة ٢ - في أى مضلع محدب إذا مد كل ضلع من أضلاعه على استقامته من جهة واحدة في ترتيب واحد كان مجموع الزوايا الخارجة الحادة يساوى أربع قوائم (المضلع المحدب هو الذى إذا مد أى ضلع من أضلاعه يحيل الشكل كله فى إحدى جهتيه)



وللبرهنة على ذلك طرقت

الأولى - إذا فرض أن عدد أضلاع الشكل = ٥

فعدد رؤوسه = ٥ كذلك

ومعلوم أن فى كل رأس من رؤوس الشكل

الزاوية الداخلة + الزاوية الخارجة = ٢ ٠

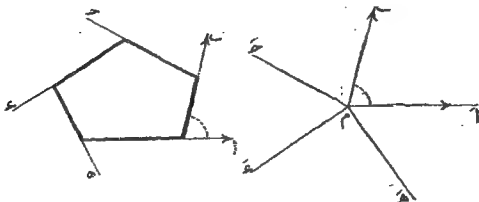
ومن حيث أن عدد رؤوس الشكل = ٥

∴ مجموع الزوايا الداخلة + مجموع الزوايا الخارجة = ٢ ٥

لكن مجموع الزوايا الداخلة + ٤ قوائم = ٢ ٥ (نتيجة ١)

∴ مجموع الزوايا الخارجة = ٤ قوائم وهو المطلوب

الثانية -





٦ م ٦ م ٦ م ٦ م ٦ م ٦ م ٦ م موازية على الترتيب لأضلاع الشكل المرموز لها  
بالحروف أ ب ج د هـ و ز ح ط ي ق ر س ت ث

وكذلك الزوايا الخارجية الأخرى للشكل =  $\widehat{A} = \widehat{D}$   $\widehat{B} = \widehat{C}$   $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{D} + \widehat{C}$   $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$   $\widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$  كل نظيرتها

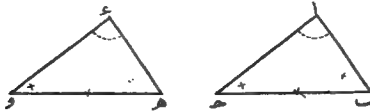
مجموع الزوايا الخارجة = مجموع الزوايا المجتمعة في م

٤ = قوائم وهو المطلوب



### نظرية ١٧

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق انا ساوي في أحدهما زاويتان وضلع نظائرهما في الثاني



اذا فرضنا أن مثلثان فيهما

$$AB = DE$$

$$\angle B = \angle E$$

$$\angle C = \angle F$$

والضلع  $BC = EF$

فانه يطلب اثبات أن  $AB = DE$  ينطبق على  $AB = DE$  تمام الانطباق

البرهان - من حيث ان مجموع الزوايا  $A + B + C = 180^\circ$  (نظرية ١٦)

$$= \text{مجموع الزوايا } D + E + F$$

ومن حيث ان الزاويتين  $A = D$  تساويان الزاويتين  $B = E$

$$\therefore \angle C = \angle F$$

فاذا طبقنا  $AB = DE$  على  $AB = DE$

على شرط أن يقع الضلع  $BC$  على مساويه  $EF$

$$\angle B = \angle E$$

$$\therefore \angle C = \angle F$$

ومن حيث ان  $\angle B = \angle E$

$$\therefore \angle C = \angle F$$

ويؤخذ من ذلك ان نقطة  $A$  تقع في آن واحد على احدى قط  $DE$  وعلى احدى قط  $EF$

وهذا لا يتأتى إلا انا وقعت على نقطة تقاطعهما  $D$

$$\therefore \text{ينطبق } \triangle ABC \text{ على } \triangle DEF \text{ تمام الانطباق}$$

$$AB = DE \quad BC = EF \quad \text{ويكون}$$

$$\triangle ABC = \triangle DEF \quad \text{ويكون في المساحة وهو المطلوب}$$

### تمارين على تطابق المثلثات

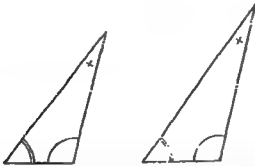
- ١ برهن على أن العمودين النازلين من نهايتي قاعدة مثلث متساوي الساقين على ساقيه متساويان
  - ٢ كل نقطة من نقط منتصف أى زاوية على بعدين متساويين من ضلعها
  - ٣ نقطة م منتصف المستقيم ا ب برهن على أن العمودين ا م و ب ص النازلين من ا ب على أى مستقيم آخر مارا بالنقطة م متساويان
  - ٤ اذا كان منتصف زاوية الرأس في المثلث عمودا على القاعدة كان المثلث متساوي الساقين
  - ٥ اذا كان العمود النازل من رأس المثلث منصف لقاعدته كان المثلث متساوي الساقين
  - ٦ اذا كان منتصف زاوية الرأس في المثلث منصفا لقاعدته أيضا كان المثلث متساوي الساقين
- [لذلك نجد المنيصف على استقامته وتم العمل كما في نظرية ٨]
- ٧ نقطة تنصيف أى مستقيم طرفاه على مستقيمين متوازيين تكون على بعدين متساويين منهما
  - ٨ نقطة تنصيف أى مستقيم طرفاه على مستقيمين متوازيين تنصف أى مستقيم آخر يمر بها طرفاه على المتوازيين
  - ٩ اذا فرضت نقطة على بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين ورسم قاطعان يمران بها فان جزأى المتوازيين المحصورين بين هذين القاطعين متساويان
  - ١٠ ا ب ح د شكل رباعي فيه الضلع ا ب = الضلع ا د والضلع ب ح = الضلع د ح  
برهن على أن القطر ا ح ينصف كلا من الزاويتين ا و ب ويكون عمودا على القطر الأخرى د ب
  - ١١ أراد مهندس أن يبين عرض نهر لا يمكنه أن يعبه فوقف في نقطة مثل ا على الشاطئ ورأى أمامه على الشاطئ الآخر الشجرة ب فنصور مستقيمين ا ب و م م م من ا على خط مستقيم عمودى على ا ب حتى وصل الى نقطة أخرى مثل ح ثم نصف المسافة بين ا و ب في نقطة م ووضع فيها قامة ثم مشى من ح على خط مستقيم عمودى على ا ح الى نقطة د حيث رأى أنه على امتداد المستقيم الواصل من الشجرة الى القامة ثم قاس المسافة ح د برهن على أن هذه المسافة يساوى عرض النهر

### في تطابق المثلثين

نرى مما تقدم في النظريات ٤ و ٧ و ١٧ أن هناك ثلاثة أحوال لانطباق المثلثين نلخصها فيما يأتي  
ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا مساوت ثلاثة أجزاء من أحدهما نظائرها من الآخر  
على الوجه الآتي

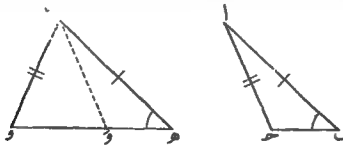
- (أولاً) ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (نظرية ٤)
- (ثانياً) الأضلاع الثلاثة (نظرية ٧)
- (ثالثاً) زاويتان وضلع (نظرية ١٧)

ولا يلزم أن ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى من أحدهما مطلق ثلاثة أجزاء  
نظائرها من الآخر فتلا



(أولاً) في الشكل كل زاوية في أحد المثلثين  
تساوى نظيرتها في المثلث الثاني مع أنه لا يقرب على  
ذلك امكان انطباقهما تمام الانطباق كما هو ظاهر

(ثانياً) اذا ساوى ضلعان وزاوية من أحد المثلثين نظائرها من الثاني وكانت الزاويتان المتساويتان  
مقابلتين لضلعين متساويين كما في الشكل الآتي فانه لا يلزم من ذلك أن يتطابق المثلثان تمام الانطباق



وذلك لأنه اذا فرضنا ان  $ا ب = س ه$   $ا ح = د و$   $د و = ز و$   $د ب = د ه$

فمن تطبيق  $ا ب ح$  على  $س ه و$  وبجيت ان  $ا ب$  ينطبق على مساويه  $س ه و$   $د ب$  على مساويتها  $ه$   
نرى أن  $ا ح$  إما أن ينطبق على  $ز و$  وإما أن يأخذ الوضع  $ز و$

تنبيه - من هذه الفروض يمكن اثبات أن الزاويتين المقابلتين للضلعين المتساويين  $ا ب$   $س ه$   
اما أن تكونا متساويتين كالزاويتين  $ا ح ب$   $د و ه$  فينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق  
واما أن تكونا متكاملتين كالزاويتين  $ا ح ب$   $د و ه$  وتسمى هذه الحالة بالحالة المهمة التي  
إما ان يتطابق المثلثان فيها أولاً (راجع عملية ٩ صفحة ٨٧)

ولا يأتي الاجهام اذا كان كل من الزاويتين المفروض تساويهما قائمة كما يتضح من النظرية الآتية

### نظرية ١٨

ينطبق المثلثان القائم الزاوية كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوى من أحدهما وتروضع نظيرهما من الثاني



اذا فرضنا أن المثلثين  $أ ب ح$  و  $هـ د و$  قائما الزاوية الأول في  $ح$  والثاني في  $و$

وكان الوتر  $أ ب =$  الوتر  $هـ د$

والضلع  $أ ح =$  الضلع  $د و$

فانه يطلب اثبات أن  $هـ د و$  ينطبق على  $هـ د و$  تمام الانطباق

البرهان - نضع المثلث  $أ ب ح$  بجانب المثلث  $هـ د و$  بحيث يقع الضلع  $أ ح$  على مساوية  $د و$  وبأخذ المثلث  $أ ب ح$  الوضع  $د و$

فن حيث أن كلا من الزاويتين  $د و هـ$  و  $د و ب$  قائمة

∴ المستقيم  $ب و$  يكون على استقامة  $هـ د$

وفي المثلث  $هـ د ب$  من حيث أن  $د ب = د و$  (لأن كلا  $أ ب$ )

∴  $د ب هـ = د د هـ$  (نظرية ٥)

وعلى ذلك فـ  $هـ د و هـ د و هـ د و$

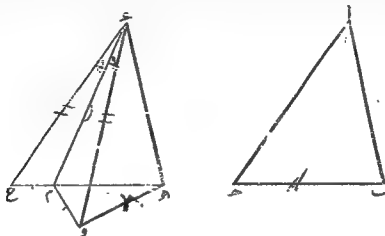
من حيث أن  $\left. \begin{array}{l} د و هـ = د د و \\ د د و = د د و \\ \text{والضلع } د و \text{ مشترك} \end{array} \right\}$  بالقيام مما تقدم

∴  $هـ د و هـ د و$  ينطبق على  $هـ د و$  تمام الانطباق (نظرية ١٧)

أي أن  $هـ د و$  ينطبق تمام الانطباق على  $هـ د و$  وهو المطلوب

### نظرية ١٩

إذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعي الأول أكبر من نظيرتها المحصورة بين ضلعي الثاني كان الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من نظيره في المثلث الثاني



إذا فرضنا في المثلثين

$$AB = DE$$

$$AC = DF$$

$$\angle A > \angle D$$

فانه يطلب اثبات أن  $BC > EF$

البرهان - نطبق  $\triangle ABC$  على  $\triangle DEF$  على شرط أن تقع نقطة  $A$  على نقطة  $D$  ويقع  $AB$  على  $DE$

ثم نفرض أن الضلع  $AC$  اخذ الوضع  $DF$  وأن الضلع  $BC$  اخذ الوضع  $EF$  فانما أخذ الضلع  $BC$  اتجاه الضلع  $EF$  وهو بالنقطة  $F$  وكان أكبر من  $EF$

أي أن  $BC > EF$

وان لم يأخذ  $BC$  هذا الاتجاه فانه لا يمر بنقطة  $F$

وعلى ذلك نفرض أن  $M$  منتصف  $BC$  وأنه يقابل  $H$  في  $M$

نصل

$$AM, DM, CM, HM$$

في

$$AM = DM$$

$$CM = CM$$

$$\angle AMC = \angle DMH$$

من حيث أن

$$\angle AMC = \angle DMH$$

∴

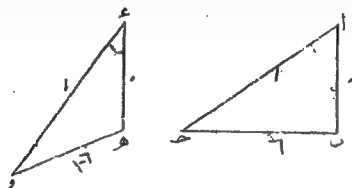
(نظرية ٤)

وفي هـ د هـ م و مجموع الضلعين هـ م ٦ د و أكبر من الضلع الثالث هـ د وبعبارة أخرى

$$هـ م + ٦ د > هـ د$$

∴ هـ د الذي هو (بـ د) أكبر من هـ د وهو المطلوب

وبالعكس: إذا تساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكان الضلع الثالث في المثلث الأول أكبر من نظيره في الثاني كانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول أكبر من نظيرتها في الثاني



إذا فرضنا في المثلثين ا ب ح ٦ د هـ و أن

$$ا ب = د هـ$$

$$٦ د = ا ح$$

$$٦ د > ب ح أكبر من هـ د$$

فانه يطلب اثبات أن د ب ا أكبر من د هـ و

البرهان— أن لم تكن د ب ا أكبر من د هـ و

فاما ان تساويها وإما أن تكون أصغر منها

$$فان كانت د ب ا = د هـ و$$

$$كان ب ح = هـ د \quad \text{(نظرية ٤)}$$

وهذا خلاف الفرض

$$\text{وان كانت د ب ا أصغر من د هـ و}$$

$$\text{كان ب ح أصغر من هـ د} \quad \text{(نظرية ١٩)}$$

وهذا خلاف الفرض أيضا

أي أن د ب ا لا يمكن أن تساوى د هـ و كما أنها لا يمكن أن تكون أصغر منها

فلا بد أن تكون د ب ا أكبر من د هـ و وهو المطلوب



### مراجعة ما تقدم في المثلثات

١ اذكر خواص المثلث من حيث (أولاً) مجموع زواياه الداخلة (ثانياً) مجموع زواياه الخارجة واذكر خاصة في كثير الأضلاع الذي عدد أضلاعه  $\geq 3$  توافق التي ذكرتها في (أولاً) وبين مع أى الأشكال يشترك المثلث في الخاصة التي ذكرتها في (ثانياً)

٢ اذكر أنواع المثلثات بالنسبة الى زواياها مع ذكر أى نظرية أو نتيجة يتضمنها ذلك التقسيم  
٣ اذكر نظريتين يكون القرض فيهما متعلقاً بأضلاع المثلث والناج الذي يستنبط من هذا القرض متعلقاً بزواياه

١ ب  $\hat{C}$  مثلث فيه  $\hat{A} = 6^\circ$  من السقيمات  $\hat{B} = 28^\circ$  من السقيمات  $\hat{C} = 6^\circ$   $2,6$  من السقيمات والمطلوب بيان زواياه مرتبة حسب مقدار كل منها (قبل قياسها) وإثبات أن هذا المثلث حاد الزوايا

٤ اذكر نظريتين يكون القرض فيهما متعلقاً بزوايا المثلث والناج الذي يستنبط من هذا القرض متعلقاً بالأضلاع  
في المثلث أ ب ج

(أولاً)  $\hat{A} = 1^\circ$   $\hat{B} = 6^\circ$   $\hat{C} = 51^\circ$  ما مقدار الزاوية الثالثة وما هو أكبر الأضلاع

(ثانياً)  $\hat{A} = 1^\circ$   $\hat{B} = 34^\circ$   $\hat{C} = 65^\circ$  ما مقدار الزاوية الثالثة. اذكر الأضلاع مرتبة على حسب طول كل منها  
٥ هل الشروط في كل من الأقسام الستة الآتية كافية لانطباق المثلثين أ ب ج د هـ و كل على الآخر تمام الانطباق. بين في أى قسم من الأقسام تكون الحالة المهمة للمثلثين ثم ارسم المثلث أ ب ج بالشروط المذكورة في كل قسم

$\hat{A} = 1^\circ$ $\hat{B} = 34^\circ$ $\hat{C} = 65^\circ$	(أولاً)
$\hat{A} = 1^\circ$ $\hat{B} = 34^\circ$ $\hat{C} = 65^\circ$	(ثانياً)
$\hat{A} = 1^\circ$ $\hat{B} = 34^\circ$ $\hat{C} = 65^\circ$	(ثالثاً)
$\hat{A} = 1^\circ$ $\hat{B} = 34^\circ$ $\hat{C} = 65^\circ$	(رابعاً)
$\hat{A} = 1^\circ$ $\hat{B} = 34^\circ$ $\hat{C} = 65^\circ$	(خامساً)
$\hat{A} = 1^\circ$ $\hat{B} = 34^\circ$ $\hat{C} = 65^\circ$	(سادساً)

٦ اذكر عبارة تتضمن خلاصة ما تقدم من النتائج في المسألة السابقة بحيث يتبين منها

(أولاً) وجوب انطباق المثلثين كل على الآخر تمام الانطباق

(ثانياً) جواز انطباقهما

٧ اشرح العبارة الآتية شرحاً وافياً : إذا ساوت ثلاث زوايا من مثلث نظيراتها من مثلث آخر لا يلزم أن ينطبق المثلثان أحدهما على الآخر تمام الانطباق لأن الفروض الثلاثة غير مطلقة

## تمارين متنوعة

٨ من نقطة خارجة عن مستقيم معلوم اذا مده اليه عمود وعتة مواثل كان

(أولاً) العمود أقصر المستقيمتين الممكنين منها

(ثانياً) المائلان اللذان يصنعان زاويتين متساويتين مع العمود متساويين

(ثالثاً) أصغر المائلين ما كانت زاويته المصنوعة مع العمود أصغر من زاوية المائل الآخر

٩ اذا تساوى من مثلث ضلعان والزاوية المقابلة لأحدهما نظيراتها من مثلث آخر فالزاوية المقابلة للضلع الآخر من المثلث الأول إما مساوية أو مكملة لنظيرتها من المثلث الثاني وفي الحالة الأولى ينطبق المثلثان تمام الانطباق

١٠ أ ب عمود على ح د والمطلوب مد عدة مواثل من نقطة أ تصنع مع العمود المذكور

الزوايا ١٥, ٣٠, ٤٥, ٦٠, ٧٥ ووضع جدول بين مقدار كل من أطوال هذه المواثل بواسطة قياسها على فرض أن طول العمود ٤ سنتيمترات

١١ أ ب مثلث طول ضلعه أ ب = ٤ سنتيمترات والضلع أ ح = ٣ سنتيمترات فاذا كان أ ب ثابت الوضع وتصورنا دوران أ ح حول نقطة أ بحيث يكون طوله دائماً ثابتاً ومساوياً ٣ سنتيمترات فما هي التغييرات في طول ب ح أثناء دوران أ ح كلما زادت د أ من الصفر الى ١٨٠° يكفي في الإجابة أن يقاس ب ح كلما زادت د أ مقدار ٣٠° وتوضع المقاييس المختلفة على هيئة جدول

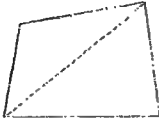
١٢ أ ب مارية رأسية موضعها نقطة ب رسم منها مستقيم أفقي مار بتقاطع ح د المتباعدتين بقدر ١٠ أمتار وكانت د ب = أ ب = ٦٥° ح د ب = ٤٠° والمطلوب وضع رسم يبين فيه الشكل المذكور (بمقياس سنتيمتر واحد لكل ٣ ٢ من الأمتار) واستخراج طول السارية على وجه التقريب بواسطة قياسه

١٣ أ ب منارة رأسها أ شاهد منه رجل السفيتين ح د ٦ د راسيتين على خط مستقيم جنوبي المنارة فاذا علم أن أ ب = ٤٠ متراً وأن د ب = ٥٧° ح د أ ب = ٣٣° فانه يطلب وضع رسم بمقياس سنتيمتر لكل ١٠ أمتار يمكن به استخراج البعدين ح د ٦ مقرباً الى اقرب متر

١٤ شاهد رجل من منارة السفيتين أ ب متباعدتين بقدر ٦٠٠ متر الأولى أ في الجهة الجنوبية الغربية والثانية ب تبعد عن جهة الجنوب بقدر ١٥ نحو الشرق وفي اللحظة عينها شاهد أ سنان في السفينة أ أن السفينة ب واقعة في الجهة الجنوبية الشرقية والمطلوب وضع رسم ذلك (بمقياس سنتيمتر لكل ١٠٠ متر) واستخراج بعد المنارة عن كل سفينة بواسطة قياسه

## في الأشكال المتوازية الأضلاع

تعريف



١ الشكل الرباعي شكل مستو محدود بأربعة مستقيمت والمستقيم  
الواصل بين رأسين متقابلتين منه يسمى قطرا له



٢ متوازي الأضلاع هو شكل رباعي أضلاعه المتقابلة متوازية  
[وسياق البرهان على أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع  
متساوية وكذلك الزوايا المتقابلة]



٣ المستطيل هو شكل متوازي الأضلاع إحدى زواياه قائمة  
[وسياق البرهان على أن جميع زوايا المستطيل قوائم صفحة ٦٤]



٤ المربع هو مستطيل أضلاعه المتجاوران متساويان  
[وسياق البرهان على أن جميع أضلاعه متساوية وزواياه قوائم صفحة ٦٤]



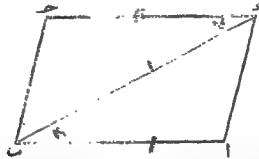
٥ المعين هو شكل رباعي أضلاعه متساوية وزواياه  
غير قوائم



٦ شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان وضلعان  
غير متوازيين

نظرية ٢٠

إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان في أى شكل رباعي يتساوى ويتوازى الضلعان الآخران



إذا فرضنا أن  $ab \parallel cd$  شكل رباعي وان  $ab = cd$  ضاهيه المتقابلين متساويان ومتوازيان فانه يطلب اثبات أن الضلعين الآخرين  $ad \parallel bc$  المتقابلين متساويان ومتوازيان كذلك لذلك نصل

البرهان - من حيث ان  $ab \parallel cd$   $ab = cd$  قاطع لهما

$$\therefore \angle a = \angle c \text{ بالتبادل}$$

في المثلثين  $ab = cd$

$$\angle a = \angle c$$

مشارك

$$\left. \begin{array}{l} \angle a = \angle c \\ \angle b = \angle d \end{array} \right\} \text{من حيث ان}$$

مما تقدم

$$\therefore \text{ينطبق } \triangle abc \text{ على } \triangle cda$$

تمام الانطباق

$$\angle a = \angle c \text{ ويكون (أولاً)}$$

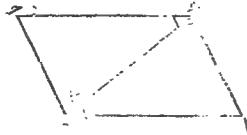
$$\angle b = \angle d \text{ (ثانياً) ومن حيث ان هاتين الزاويتين متبادلتان}$$

$$\therefore ab \parallel cd$$

$$\text{أى أن } ab \parallel cd \text{ متساويان ومتوازيان وهو المطلوب}$$

## نظرية ٢١

في متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان وكل زاويتين متقابلتين متساويتان والقطر يقسم الشكل الى قسمين متساويين



إذا فرضنا أن  $AB$  و  $CD$  شكل متوازي الأضلاع قطره  $AC$  فانه يطلب إثبات

(أولاً) أن  $AB = CD$  و  $AD = BC$

(ثانياً) أن  $\angle BAC = \angle DCA$  و  $\angle DAC = \angle BCA$

(ثالثاً) أن  $\angle BAD = \angle DCB$  و  $\angle ADC = \angle BAC$

(رابعاً) أن  $\triangle ABC = \triangle CDA$  في المساحة

البرهان — من حيث أن  $AB$  و  $CD$  متوازيان و  $AC$  قاطع لهما بالتبادل

$$\therefore \angle BAC = \angle DCA$$

ومن حيث أن  $AD$  و  $BC$  متوازيان و  $AC$  قاطع لهما

$$\therefore \angle DAC = \angle BCA$$

وعلى ذلك في المثلثين  $\triangle ABC$  و  $\triangle CDA$

$$\angle BAC = \angle DCA$$

$$\angle DAC = \angle BCA$$

من حيث أن الضلع  $AC$  مشترك

(نظرية ١٧)  $\therefore \triangle ABC = \triangle CDA$  في المساحة

اذن (أولاً)  $AB = CD$  و  $AD = BC$  ... ..

(ثانياً)  $\angle BAC = \angle DCA$  و  $\angle DAC = \angle BCA$  ... ..

(رابعاً)  $\angle BAD = \angle DCB$  و  $\angle ADC = \angle BAC$  في المساحة ... ..

ومن حيث أن  $\triangle ABC = \triangle CDA$

$$\angle BAC = \angle DCA$$

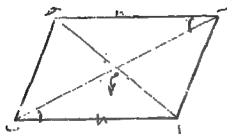
(ثالثاً) الزاوية الكلية  $\angle ABC =$  الزاوية الكلية  $\angle DCB$  ... ..

نتيجة ١ — اذا كانت احدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة فكل زاوية أخرى فيه قائمة ايضا وبعبارة أخرى زوايا المستطيل كلها قوائم

لأن مجموع كل زاويتين متجاورتين  $\angle 2 = \angle 1$   
 فانما كانت إحدهما قائمة وجب أن تكون الأخرى كذلك  
 ومن حيث أن كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متساويتان  
 $\therefore$  جميع الزوايا قوائم

نتيجة ٢ — أضلاع المربع متساوية وزواياه قوائم

نتيجة ٣ — قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر



اذا فرضنا أن القطرين  $\angle 1 = \angle 2$  يتقاطعان في م  
 فانه يطلب إثبات أن  $\angle 3 = \angle 4$  و  $\angle 5 = \angle 6$   
 البرهان — في  $\triangle AEB$  و  $\triangle CED$

بالتبادل  
 بالتقابل بالراس

$\angle 1 = \angle 2$   
 $\angle 3 = \angle 4$   
 والضلع  $AB = CD$

$\therefore \angle 5 = \angle 6$  و  $\angle 3 = \angle 4$  (نظرية ١٧)

### تمارين

١ يكون الشكل الرباعي متوازي الأضلاع

(أولاً) اذا كان كل ضلعين متقابلين فيه متساويان

(ثانياً) اذا كان كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان

(ثالثاً) اذا نصف قطراه كل الآخر

٢ قطرا المعين ينصف كل منهما الآخر ويكونان متعامدين

٣ اذا تساوى قطرا متوازي الأضلاع كانت زواياه قوائم

٤ قطرا متوازي الأضلاع غير متساويين مالم يكن مستطيلاً أو مربعا

## تمارين على الخطوط المتوازية والأشكال المتوازية الأضلاع

### التماثل والتطبيق

- ١ برهن على أنه إذا طويتا المعين عند أحد قطريه ينطبق المثلثان اللذان على جانبي هذا القطر كل على الآخر تمام الانطباق أى أن قطر المعين يقسمه الى مثلثين متماثلين فى الوضع
- ٢ برهن على أن كلا من قطري المربع محورا للتماثل وأوجد مستقيمين آخرين يقسم كل منهما المربع الى قسمين متماثلين
- ٣ كل من قطري المستطيل يقسمه الى مثلثين متطابقين فهل يكون على هذا قطر المستطيل محورا للتماثل فيه وما هما المستقيمان اللذان يقسم كل منهما المستطيل الى جزأين متماثلين
- ٤ بين ما اذا كان لموازي الأضلاع محورا تماثل واذكر السبب
- ٥  $ABCD$  شكل رباعى فيه  $AB = DC$  و  $AD = BC$  والمطلوب معرفة أى القطرين يصح أن يكون محورا للتماثل مع العلم بأن الأضلاع ليست جميعها متساوية
- ٦ المطلوب اثبات ماأتى بطريقة التطبيق  
(أولا) يتطابق موازيا الأضلاع اذا ساوت زاوية ضلعان متجاوران من أحدهما نظائرها من الثانى  
(ثانيا) يتطابق المستطيلان اذا ساوى ضلعان متجاوران من أحدهما نظيريهما من الثانى
- ٧ ينطبق الشكلان الرباعيان كل على الآخر تمام الانطباق اذا ساوت الأضلاع الأربعة ومطلق زاوية من أحدهما نظائرها من الثانى

### (مسائل نظرية متنوعة)

- ٨ منتصف قطر موازى الأضلاع ينصف أى مستقيم يترده ويتهى بضلعين متقابلين
- ٩ العمودان التازلان من رأسين متقابلين فى موازى الأضلاع على القطر الواصل بين الرأسين الآخرين متساويان
- ١٠ اذا كانت النقطة  $S$  منتصف الضلع  $AB$  فى موازى الأضلاع  $ABCD$  والنقطة  $S$  منتصف الضلع المقابل  $CD$  كان الشكل  $SDCS$  موازى الأضلاع
- ١١  $ABCD$   $E$  و  $F$  مثلثان فيها  $AB$  يساوى  $DE$  و  $BC$  يساوى  $EF$  و  $AC$  يساوى  $DF$  والمطلوب اثبات أن  $AD$  يساوى  $CF$  و  $AE$  يساوى  $BF$
- ١٢  $ABCD$  شكل رباعى فيه  $AB$  يوازى  $CD$  و  $AD$  يساوى  $BC$  ولكنه لا يوازى والمطلوب اثبات

(أولاً) ان  $١ د + ١ د = ٩٨٠ = ٦ د + ١ د$

(ثانياً) ان القطر  $١ د =$  القطر  $١ د$

(ثالثاً) ان المستقيم الواصل من منتصف  $١ د$  الى منتصف  $٦ د$  يقسم الشكل الى جزأين متقابلين  $١٣$   $١ د$   $٦ د$   $٦ د$  قضبان متساويان يوران بسرعة واحدة الأول حول  $١$  والثاني حول  $٦$  في الاتجاه الذي يدور فيه عقرب الساعة فإذا ابتداء في دورانهما من وضعين متوازيين في اتجاهين متضادين فانه يطلب اثبات

(أولاً) ان هذين القضيبين يكونان دائماً متوازيين أثناء دورانهما

(ثانياً) ان المستقيم الواصل بين الطرفين  $١ د$   $٦ د$  يردائماً بنقطة معلومة ثابتة

(مسائل عديدة وتخطيطية متنوعة)

$١٤$   $١ د$   $٦ د$  مثلث والمطلوب معرفة مقدار كل من زواياه مع العلم بأن  $١ د$  الداخلة  $= \frac{٢}{٧} ١ د$  الخارجة وأن ثلاثة أمثال  $١ د =$  أربعة أمثال  $٦ د$

$١٥$  سفينة سائرة نحو الجهة الشرقية اضطرت الى السير حول جزيرة فغيرت اتجاهها (أولاً) بقدر  $٩٣$  ثم  $٧٨$  ثم  $١١٩$  ثم  $٩٤$  والمطلوب معرفة مقدار التغير الذي يجب أن تحدثه السفينة في اتجاهها حتى تسير في اتجاهها الأول أى نحو الجهة الشرقية

$١٦$  انا كلف مجموع الزوايا الداخلة لأى شكل كثير الأضلاع يساوى مجموع زواياه الخارجة فانه يطلب عدد أضلاعه مع إقامة البرهان على صحة الجواب

$١٧$  المطلوب رسم الشكل الخماسى  $١ د$   $٦ د$  بحيث تكون فيه  $١ د = ١١٠$   $٦ د = ١١٥$   $٦ د = ٩٣$   $١ د = ٩٥٢$  وذلك باستعمال المقلبة

ثم تحقيق ما اذا كان الضلع  $١ د$  يوازي  $٦ د$  بواسطة المسطرة والبرجل وإثبات ذلك نظرياً

$١٨$   $١ د$   $٦ د$  نقطتان ثابتتان . مددنا من  $١$  مستقيماً غير محدود مثل  $١ د$  مازا بالنقطة  $٦$  ومن  $٦$  مستقيماً آخر مثل  $٦ د$  غير محدود كذلك مازا بنقطة  $١$  فإذا تصورنا أن المستقيمين  $١ د$   $٦ د$  ابتداءً أن يورا في آن واحد الأول حول نقطة  $١$  في اتجاه عقرب الساعة على شرط أن يدور في الثانية الواحدة في زاوية مقداره  $\frac{١}{٧}$  والثاني حول  $٦$  في اتجاه مخالف لسير عقرب الساعة على شرط أن يدور في الثانية الواحدة في زاوية مقدارها  $\frac{٢}{٧}$  فانه يراد

(أولاً) معرفة الزمن الذي يمضى حتى يكون  $١ د$   $٦ د$  متوازيين

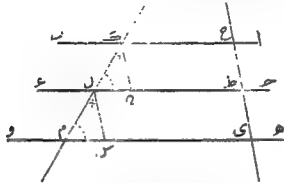
(ثانياً) إيجاد مقدار الزاوية بين  $١ د$   $٦ د$  بالرسم والحساب بعد  $١٢$  ثانية من ابتداء الدوران

(ثالثاً) مقدار ما تقصصه هذه الزاوية بعد ذلك في الثانية الواحدة



نظرية ٢٢

إذا قطع مستقيم عدة مستقيمت متوازية وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المتوازيات متساوية فالأجزاء المحصورة بينها لأي قاطع آخر متساوية كذلك



إذا فرضنا أن  $ا ب$   $د هـ$   $ك$   $ن$   $ط$   $ي$  قاطع لها وفيه الجزء  $ع ط =$  الجزء  $ط ي$  وأن  $ك ل م$  قاطع آخر فانه يطلب اثبات أن الجزء  $ك ل =$  الجزء  $ل م$

لذلك نرسم من  $ك$  المستقيم  $ك د$  موازيا  $ع ي$  ومن  $ل$  المستقيم  $ل س$  موازيا  $ع ي$  ايضا البرهان - من حيث  $ا ب د هـ$   $ك$   $ن$   $ط$   $ي$  قاطع لها

$$\therefore د ك ل = د ل م \quad \text{بالتناظر}$$

ومن حيث ان  $ك د$  يوازي  $ل س$  لأن كلا يوازي  $ع ي$   $ك م$  قاطع لها  
 $\therefore د ك ل = د ل م \quad \text{بالتناظر}$

لكن كلا من الشكلين  $ع د$   $ك ط$   $س$  متوازي الأضلاع

$$\therefore ك د = الضلع المقابل له ع ط \quad ل س = الضلع المقابل له ط ي$$

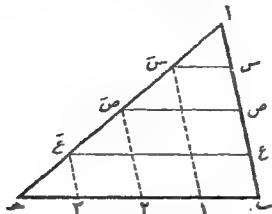
$$\begin{aligned} \text{ومن حيث ان} \quad ع ط &= ط ي \\ ك د &= ل س \end{aligned} \quad \text{بالقروض}$$

وعلى ذلك قى المثلين  $ك ل د$   $ل م س$

$$\left. \begin{aligned} د ك ل &= د ل م \\ ك د ل &= ل م س \\ ك ل س &= ل م س \end{aligned} \right\} \text{من حيث ان}$$

$\therefore$  ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق  
 $\therefore ك ل = ل م$  وهو المطلوب (نظرية ١٧)

نتيجة - إذا قسمنا أحد أضلاع المثلث  $abc$  ولكن  $a$  إلى أقسام متساوية بالنقط  $s$   $6$   $ص$   $6$   $ع$  ثم مددنا من هذه النقط المستقيمت  $س$  من  $6$   $ص$   $6$   $ع$  موازية القاعدة  $bc$  فإن هذه المتوازيات تقسم الضلع الثاني  $a$  إلى أقسام متساوية



وبنا يمكن تعيين طول كل من هذه المتوازيات بالنسبة الى طول القاعدة  $BC$

وذلك لأننا إذا رسمنا من ص ٦ ص ٦ ع ٦ المستقيمات من ١ ٦ ص ٢ ٦ ع ٣ موازنة ١ ٦

فان هذه المستقيمت على حسب نظرية ٢٢ قسم ب ح الى اربعة اقسام متساوية ويكون س م مساويا لحد هذه الأقسام ٦ ص ص اثنين منها ٦ ع ع يساوي ثلاثة وبعبارة أخرى يكون

$$ح \cup \frac{3}{4} = \overline{ع} ع \text{ } 6 \quad ح \cup \frac{2}{4} = \overline{ص} ص \text{ } 6 \quad ح \cup \frac{1}{4} = \overline{س} س$$

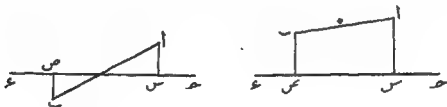
وقال على وجه الاجمال انا انقسم أحد أضلاع المثلث الى ٣ من الأقسام المتساوية ومد منها موازيات لقاعدته تقابل الضلع الثاني فان

وہمکنہ  $۲ \cup \frac{۲}{3} = \bar{c} c 6 ۲ \cup \frac{۲}{3} = \bar{c} c ۶ ۲ \cup \frac{۲}{3} = \bar{c} c ۶ ۲$

تنبيه - ينبغي أن تدرس الآن عملية ٧ صفحة ٨٣

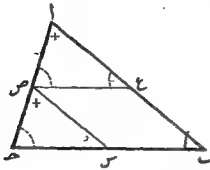
(تعریف)

إذا أنزلنا من نهايتي مستقيم معلوم مثل  $ا ب$  عمودين مثل  $ا س$   $ب ص$  على مستقيم آخر مثل  $ح د$  غير محدود فإنه يقال للمستقيم  $ص س$  المحصور بين موقعي العمودين المذكورين أنه مسقط  $ا ب$  على  $ح د$



## تساوين على المستقيمتين المتوازيتين والأشكال المتوازية الأضلاع

إذا رسمنا من منتصف أحد أضلاع مثلث مستقيما يوازي قاعدته فإنه يمر بمنتصف الضلع الثاني وهذه حالة خاصة للنظرية ٢٢



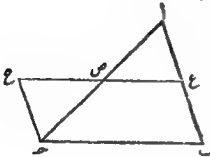
[ ١ ب = مثلث ونقطة ع منتصف ا ب ٦ ع ص  
يوازي ب =

ويطلب اثبات أن ا ص = ع

لذلك نرمس من ص يوازي ا ب ونثبت أن ا ع ا ص  
ينطبق على ا ع ص = تمام الانطباق ]

٢٢ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين في المثلث يوازي الضلع الثالث

[ ١ ب = مثلث والنقطة ع منتصف ا ب ٦ ص  
منتصف ا =



ويطلب اثبات أن ع ص يوازي ب =

لذلك نمدد ع ص على استقامته الى ح وتأخذ البعد  
ص ح = ع ص ونصل ح = ثم نبرهن على أن ا ع ا ح  
ينطبق على ا ع ح = تمام الانطباق  
ومن ذلك يتضح الباقي من البرهان ]

٣ المستقيم الواصل من منتصف ضلع مثلث الى منتصف الآخر يساوي نصف القاعدة

٤ المطلوب اثبات ان المستقيمتين الثلاثة الواصلة بين منتصفات أضلاع مثلث تقسمه الى أربعة  
مثلثات متساوية من عامة الوجوه

٥ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين في مثلث ينصف أى مستقيم ممدود من رأس المثلث  
الى قاعدته

٦ ا ب = متوازي الأضلاع ونقطة ص منتصف الضلع ا د ونقطة ع منتصف الضلع المقابل ب ح  
برهن على أن ص ح ا يقسمان القطر د ب الى ثلاثة أقسام متساوية

٧ المستقيمتين الواصلة بين منتصفات الأضلاع المجاورة لشكل رباعي تكون شكلا متوازي  
الأضلاع

٨ إذا نصفنا أضلاع الشكل الرباعي ووصل بين منتصفى كل ضلعين متقابلين بمستقيم كان  
كل من المستقيمين الواصلين منصفين الآخر

٩. ا ب مستقيم وقطة م منتصفه ك ص ص مستقيم آخر أنزلنا عليه من القطة ا م ك ب الأعمدة ا م ك ب ه و كانت ب ه = ٤, ٢ من السمتيات ك ا م = ١, ٨ من السمتيات والمطلوب إيجاد طول م د وتحقيق ذلك بالقياس ثم البرهنة على أن

م د =  $\frac{1}{4}(ب ه + ا م)$  أو  $\frac{1}{4}(ب ه \sim ا م)$  على حسب كون القطتين ا ب في جهة واحدة من المستقيم م ص أو في جهتين مختلفتين منه

١٠. اذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمتين متوازية وكان جزءا كل قاطع المحصوران بين هذه المتوازيات متساويين كان طول ثاني هذه المتوازيات المحصور بين القاطعين وسطا حسابيا بين المتوازيين الآخرين المحصورين بين القاطعين المذكورين

١١. شبه منحرف طول إحدى قاعدتيه المتوازيتين ا ب من السمتيات والأخرى ب من السمتيات والمطلوب اثبات أن المستقيم الواصل بين منتصفى الضلعين غير المتوازيين مواز للقاعدتين المتوازيتين وطوله يساوى  $\frac{1}{2}(ب + ا)$  من السمتيات

١٢. اذا فرضت نقطة مثل ا ومد منها المستقيمان ا م ك ص وقسم أحدهما ا م الى خمسة أقسام متساوية ومد من قطة التقسيم مستقيمتين متوازيات تقابل المستقيم الآخر ا م فانه يراد قياس كل من هذه المتوازيات الخمسة وأخذ متوسط أطوالها ومقارنته بطول الموازى الثالث ثم البرهنة بطريقة هندسية على أن هذا الموازى الثالث هو متوسط المتوازيات الخمسة

اذكر منطوق نظرية لهذه الحالة تشمل أى عدد فردى من هذه المتوازيات وليكن  $(٢ + ١)$

١٣. اذا أنزلت أعمدة من رؤوس متوازي الأضلاع على مستقيم خارج عنه فانه يطلب البرهنة على أن مجموع العمودين النازلين من رأسين متقابلين يساوى مجموع العمودين الآخرين (لذلك نصل القطرين ومن نقطة تقاطعهما نزل عمودا على المستقيم المعلوم)

١٤. مجموع العمودين النازلين على ساقى مثلث متساوى الساقين من أى نقطة مفروضة على قاعدته يساوى العمود النازل من أحد طرفى القاعدة على الساق المقابل له

(نتج من ذلك أن مجموع العمودين النازلين على ساقى المثلث المتساوى الساقين من أى نقطة على قاعدته ثابت أى لا يتغير مقداره مهما تغير وضع النقطة على القاعدة)

ما هو التغير الذى يحصل فى هذه الحالة اذا فرضت النقطة على امتداد القاعدة

١٥. اذا فرضت نقطة داخل مثلث متساوى الأضلاع وأنزل منها أعمدة على كل من أضلاعه فان مجموع هذه الأعمدة يساوى العمود النازل من أحد رؤوس المثلث على الضلع المقابل له وعلى ذلك فمجموع هذه الأعمدة ثابت

١٦. اذا كانت المستقيمتان المتوازيات متساوية كانت مساحتهما على مستقيم ما متساوية

\* العلامة ~ تدل على «الفرق بين» كمين

مقياس الرسم القطري

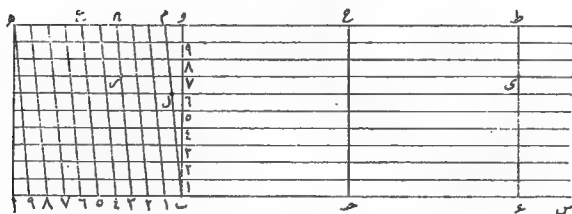
لما كانت مقاييس الرسم القطرية من أهم المسائل التطبيقية على نظرية ٢٢ رأينا أن نبين فائدتها وكيفية انبثاقها وأن نتعصر في ذلك على شرح المقياس القطري العشري إذ فيه الكفاية فنقول

إذا فرضت قطعة أرض وأريد عمل رسم لها وكان مقياسه صغيرا كان الخط الدال على ماطوله متر في الأرض المذكورة صغيرا للدرجة يصعب معها قياسه بالضبط لكأنى مما سيحىء أنه يمكن بواسطة المقاس القطرى قياس مثل هذه الأطوال الصغيرة الى درجة عظيمة من الضبط والاحكام

فلو كان مقياس رسم الأرض المذكورة هو  $\frac{1}{25000}$  كان

ما طوله متر مدلولاً عليه في الرسم بخط طوله ٤.٠٠٠ م. من المتر

وما طولہ ۱۰۰ متر مدلولاً علیہ فی الرسم بخط طولہ ۰,۴ من المتر ای ۴ سنتیمترات



فإذا رسمنا مستقيماً ما مثل  $AS$  وركزنا فيه نقطة  $A$  وأخذنا عليه الأبعاد المتتالية المتساوية  $AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IK, KL, LM, NO, P, Q, R, S$  الخ على شرط أن كل منها يساوي  $\frac{1}{2}$  سنتيمترات ثم قسمنا الجزء  $AS$  إلى عشر أقسام متساوية في النقاط  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  الخ

حدث أن كلاماً من الأجزاء ا ب ج د هـ و ز ح ط ي الخ دال على ما طولها ١٠٠ متر

وأن كلا من الأجزاء العشرة التي انقسم إليها **أ** **دال** على ما طوله ١٠ امتار

وإذا افترضنا من  $AB$  و  $AC$  أعمدة على  $A$  من مثل  $AH$  و  $AD$  و  $AE$  و  $AF$  و  $AG$  و  $AH$  وأخذنا على  $AH$  عشرة أبعاد متساوية ومددنا من نهاياتها مستقيمت موازى  $AD$  من حصلنا على عشرة مستقيمت متوازية

نقترض أنها تقطع العمود ب و في النقط ١, ٢, ٣, ٠٠٠ الخ

ثم تقسم و هـ أحد أجزاء الموازي العاشر الى عشرة أقسام متساوية

فإننا تصورنا وصل نقط تقسيم و ه بما نأظرها من نقط تقسيم ب ا نرى أن المستطيل و ب ا ه  
انقسم إلى عشرة مستطيلات جزيئة متساوية نصل أقطارها كما هو مبين في الشكل فيحدث المقياس  
النظري المشري المواد أنشأوه

ثم انه في المثلث ب و م من حيث ان اجزاء المتوازيات المحصورة بين ب و م و ٦ م توازي و م ومن حيث ان م يدل على طول ١٠ أمتار  
فبناء على ما تقدم في نتيجة نظرية ٢٢ نجد أن

في المثلث  $b$  و  $m$  جزء الموازي المرقوم  $1 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$  (مترا)

$$(مترين) ۲ = ۲۵ \times \frac{۲}{۱۰} = ۲ \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 6$$

وممكننا  $3 = 2 \times \frac{3}{2} = 3$  (أمتار) » » » 6

وعلى ذلك إذا أريد إيجاد انحناء الدال على ماطوله  $\gamma$  أمتار مثلا من هذا المقياس كان جزء الموازي المرقوم  $\gamma$  المحصور بين العمود  $o$  وبين القطر  $o\gamma$  هو انحناء المطلوب

وإذا أريد إيجاد الخط الدال على ما طولها ٢٣٧ متراً نجري العمل هكذا

نذكر البرجل في نقطة تقاطع الموازي ٧ بالعمود ٤ ط ولتكن نقطة ى ثم نفتح البرجل حتى نصل الى نقطة تقاطع هذا الموازي بالقطر ٣ هـ ولتكن نقطة ٤ فيكون ٤ هو الخط المطلوب لأن

$$r \vee + us = rG$$

$$y + y' + y'' =$$

١٢٧ ٢٢٧ =

وبالعكس إذا كان المراد معرفة مايدل عليه طول خط معين في رسم قطعة الأرض المتقدم ذكرها فذلك فتح البرجل بقدر طول هذا الخط المعين ونطبق القصة على أحد الموازيات العشرة على شرط أن يكون احد طرفي البرجل في نقطة تقاطع الموازى بأحد الأعمدة والطرف الآخر في نقطة تقاطع هذا الموازى بأحد الإقطار

فتلّا ان كان الخط المعلوم دالاً على طول بين ١٠٠ متر و ٢٠٠ متر فتفتح البرجل فصحة بقدر طول الخط ونضع أحد طرفي البرجل على العمود ٤ ع ونحرك البرجل عليه حتى يقع طرفه في نقطة تقاطع العمود مع أحد المتوازيات ويقع طرف البرجل الثاني في نقطة تقاطع هذا الموازي بأحد الأقطار.

فإذا فرضنا أن الموازي هو السادس مثلا وأن القطر هو ٥ ع حدث أن طول الخط المعلوم دال على  $100 = 6 + 50 + ١٥٦$  مترا

### تعارين على المقاييس الطولية

١ خريطة مقياس رسمها ٤ سنتيمترات لكل ١٠٠ متر ويراد رسم مستقيمين أحدهما يدل على ماطوله ٣٣٦ متراً والآخر يدل على ماطوله ٤٠٨ من الأمتار

٢ خريطة مقياس رسمها ٤ سنتيمترات لكل ١٠٠ متر ويراد رسم مستقيم يدل على ماطوله ٤١٧ متراً

٣ المطلوب انشاء مقياس رسم قطري دال على الأمتار على شرط أن يكون طول كل سنتيمترين فيه دالاً على ١٠٠ متر

٤ المطلوب رسم مستقيم يكون دالاً على ٢٥ متراً في خريطة مقياس رسمها سنتيمتران لكل ١٠٠ متر

## الهندسة العملية

## العمليات

يلزم لحل العمليات الآتية المسطرة والبرجل فقط اذ لا يستدعى العمل إنشاء السير في الحل قياس الخطوط أو الزوايا وعلى ذلك لا لزوم لاستعمال المساطر المدرجة أو المنقلات في رسم أشكال هذه العمليات وليس الغرض من هذه العمليات دراستها على انها نظريات فقط بل يجب في جميع الأحوال أن يعمل الرسم بحيث يراعى في عمله قواعد الاحكام والضبط

وقد رأينا أن نردف كل مسألة عملية ببرهانها النظري ولكن هذا لا يمنع من تحقيق نتيجة العمل وصحة الرسم بالقياس

وتتل الخطوط المنقوطة في أشكال هذه العمليات على أنها جاءت لقصد البرهان تمييزا لها من الخطوط اللازمة في جوهر العملية

وينبغي أن يكون لدى الطالب الأدوات الآتية ليتمكن من اجراء العمل وحل الدتاوى

١ مسطرة مستقيمة الحافة مقسمة من أحد جانبيها الى السنتيمترات والمليمترات ومن الجانب الآخر الى البوصات وأعشارها

٢ مثلثان من الخشب قائم الزاوية أحدهما متساوى الساقين والآخر زاويتا قاعدته ٩٠° ٦ ٣٠°

٣ برجل

٤ آلة نقل البعد

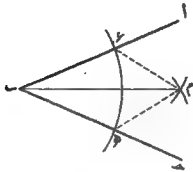
٥ منقلة مستديرة (نصف دائرة)



## عمليات على المستقيمات والزوايا

## عملية ١

المطلوب تصيف زاوية معلومة

نفرض أن  $\angle ا ب ج$  الزاوية المعلومةالعمل - نركز البرجل في ب ونصنف قطر مناسب نرمس قوسا يقطع ب ا في د و  $ب ج$  في هـ

ثم نركز في كل من د و هـ ونصنف قطر يساوى د هـ نرمس قوسين يتقاطعان في م ونصل ب م

فيكون هو منصف الزاوية  $\angle ا ب ج$ 

البرهان - نصل

ففى المثلثين

$$\left. \begin{array}{l} د م ب = م ج هـ \\ د ب = م ج \\ د م = م ج \end{array} \right\} \text{ من حيث ان}$$

$$\left. \begin{array}{l} د م ب = م ج هـ \\ د ب = م ج \\ د م = م ج \end{array} \right\} \text{ من حيث ان}$$

$$\left. \begin{array}{l} د م ب = م ج هـ \\ د ب = م ج \\ د م = م ج \end{array} \right\} \text{ من حيث ان}$$

$$\therefore \text{ ينطبق } د م ب \text{ على } د م ج \text{ على } د م هـ \text{ تمام الانطباق ( نظرية ٧ )}$$

$$\therefore \text{ أى أن } د م ب = د م ج = د م هـ$$

$$\therefore \text{ ب م هو منصف } \angle ا ب ج$$

تبيّه - يشاهد أننا ركنا في د و هـ ورسمنا قوسين بنصف قطر يساوى البعد د هـ وإن تقاطع

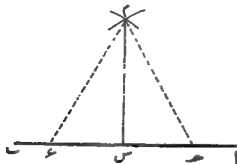
هذين القوسين عين النقطة م مع أنه لا يلزم أن يكون نصف قطر هذين القوسين مساويا للبعد د هـ

فانه يمكن أن يساوى اى بعد كان على شرط أن يكون كافيا لتقاطع القوسين



### عملية ٣

المطلوب إقامة عمود على مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه



فرض ان  $a$  هو المستقيم المعلوم  $\delta$  من النقطة المفروضة عليه  
العمل - نركز في  $\delta$  وننصف قطر مناسب فين التقطين  $\delta$  و  $a$  على  $a$  بحيث  
يكون  $\delta = \delta$

ثم نركز في كل من  $\mathcal{C}_6$  وبنصف قطريساوي  $\mathcal{C}_8$  نرم قوسين يتقاطعان في 2

ثم فصل م من فيكون عمودا على ا ب

البرهان - فصل ٢ - ٢٦٥

م ص ح 6 م م د      قى المثلثين

علا

$$m = \frac{1}{2} \text{ m}$$

م. س. مشك

$m = n$  لأنهما نصفان قطرين في دائرتين متساويتين

(نظريّة v)

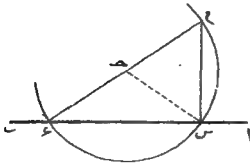
$$\Delta_{\text{MS}} = \Delta_{\text{MS}}^{\text{MS}}$$

ولكونهما متجاورتين كل منهما قائمة

أى أن سن م عمود على ا ب

ملاحظة - اذا كانت نقطة من قوسية من أحد طرفي المستقيم المعلوم يتبع في طريقة حل المسألة حملتخذ إحدى الطريقتين الآتيتين

### الطريقة الأولى



العمل - قرض نقطة مثل ح خارج المستقيم ا ب  
ونركز فيها ونبصف قطر يساوي ح من نرمس محيط دائرة  
يقطع ا ب في د

ثم نصل د ح ونعتمد على استقامته حتى يلاقى المحيط في م  
ثم نصل س م فيكون هو العمود المطلوب

البرهان - نصل

فن حيث ان

$$\angle د س ح = \angle م س ح = \angle م ح د$$

ومن حيث ان

$$\angle د س ح = \angle م س د$$

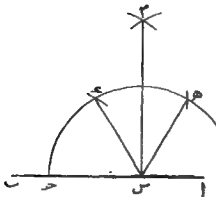
$$\therefore \text{الزاوية الكلية } د س م + م س د = د س ح + ح س م$$

$$= \text{نصف } ٩٠$$

$$= ٩٠$$

س م عمود على ا ب

### الطريقة الثانية



العمل - نركز في س ونبصف قطر بناسج نرمس قوسا  
يقطع ا ب في د

نركز فيها وبالبعد عنه نرمس قوسا يقطع الأول في د

نركز فيها وبالبعد عنه نرمس قوسا آخر يقطع القوس الأول في ه

ثم نصل د س ح ه س

ونبصف د س ه بالمستقيم س م (عملية ١)

فيكون س م هو العمود المطلوب

البرهان - يمكن إثبات أن كلا من الزاويتين د س ح ح س ه تساوي ٩٠

$$\text{ومن حيث ان } \angle د س م = \angle م س د = \frac{1}{٢} \angle د س ه$$

$$\therefore \angle د س م = \angle م س د = ٩٠$$

أي أن س م عمود على ا ب

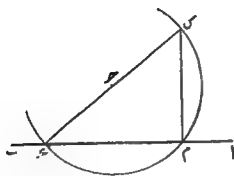
الآتين

### الطريقة الأولى

العمل - نعرض أى نقطة مثل د على ا ب ونصل من د

ثم نتصفه في  $\alpha$  ونركز فيها ويبعد يساوي  $\alpha$  من نرمم  
محيط دائرة يقطع  $\alpha$  في  $\beta$  ويمر بنقطة  $\delta$

نصل من ٢ فيكون هو العمود على ١ لأنه كما  
تقدم في عملية ٣ (بالطريقة الأولى) ١ من ٢ و قائمة



### الطريقة الثانية

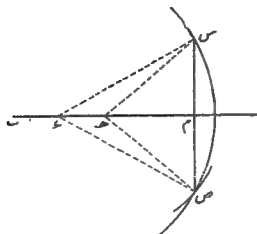
العمل - نقرض أى تقطين مثل 6 على 1

ثم تركني وابتصف قطريساوي و من نرم  
قوسا في الجهة الأخرى من اب غير التي فيها من

ثم ترك في ح و بنصف قطريساوي ح من نرم -  
قوسا آخر يقطع الأول في ص

نصل  
س من قاطعا اب في م

فيكون  $m$  هو العمود



البرهان —  $\Delta$  من  $\bar{S}$  يطبق على  $\Delta$  من  $S$  تمام الانطباع (نظرية ٧)

$$\Delta \text{ م د } = \Delta \text{ م د } \therefore$$

٥ ص ٢ ينطبق على ٥ ص ٢ تمام الانطباق (نظرية ٤)

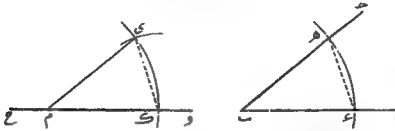
$$\therefore \Delta \text{ من } \angle = \Delta \text{ من } \angle$$

ومن حيث انهما متجاوران فكل منهما قائمة

أى أن م م عمود على ا ب

### عملية ٥

المطلوب مد مستقيم يصنع مع آخر معلوم من نقطة مفروضة عليه زاوية تساوي زاوية معلومة



فرض ان  $\angle \alpha$  الزاوية المعلومة  $\angle \beta$  المستقيم المعلوم  $\angle \gamma$  النقطة المفروضة عليه التي يراد مد مستقيم منها يصنع مع  $\angle \gamma$  زاوية تساوي  $\angle \alpha$

العمل - نرکز في  $\beta$  ونصنف قطر مناسب نرم قوسا يقطع  $\beta$  في  $\delta$  و  $\epsilon$  في  $\eta$

ثم نرکز في  $\gamma$  وبالبعد عينه نرم قوسا يقطع  $\gamma$  في  $\zeta$

نرکز في  $\alpha$  ونصنف قطريساوي  $\delta$  نرم قوسا يقطع الأول في  $\iota$

نصل  $\gamma$  فتكون  $\iota$  هي الزاوية المطلوبة

البرهان - نصل  $\delta$  و  $\epsilon$  و  $\zeta$  و  $\iota$

في المثلثين  $\beta \delta \epsilon$  و  $\gamma \zeta \iota$

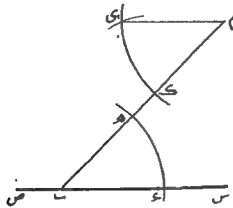
من حيث ان  $\left. \begin{array}{l} \beta = \gamma \\ \delta = \zeta \\ \epsilon = \iota \end{array} \right\}$  لأنهما نصفان قطري دائرتين متساويتين  
السبب عينه  
بالعمل  $\delta = \zeta$

∴ ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق

أي أن  $\angle \alpha = \angle \beta$  (نظرية ٧)

### عملية ٦

المطلوب رسم مستقيم يوازي آخر معلوما من نقطة مفروضة



نفرض ان س ص المستقيم المعلوم ٦ م النقطة المفروضة التي يراد مده مستقيم منها يوازي س ص

العمل - نفرض نقطة ثا مثل ب على س ص ونصل م ب

ثم نرمس من نقطة م المستقيم م ي صانعا مع م ب زاوية ي م ب تساوي زاوية م ب ص  
(عملية ٥) وتكون متبادلة معها

فيكون م ي موازيا س ص \*

البرهان - من حيث ان ب م قاطع للمستقيمين م ي ٦ س ص

والزاويتان المتبادلتان ي م ب ٦ س ب م متساويتان

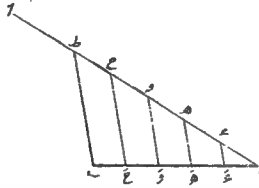
∴ م ي يوازي س ص

\* كثيرا ما يسهل رسم الأعمدة والمتوازيات في العمليات ٦، ٤، ٣ باستعمال المثلثات ولذا يستغنى عادة عن اجراء العمل على الكيفية المبينة هناك



### عملية ٧

المطلوب تقسيم مستقيم محدود الى عدد ما من الأقسام المتساوية



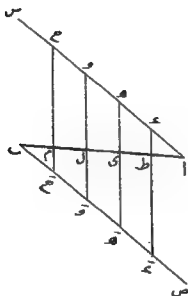
نفرض أن  $AB$  المستقيم المعلوم المراد تقسيمه الى خمسة أقسام متساوية  
العمل - نرسم من  $A$  مستقيماً مثل  $AC$  غير محدود يصنع مع  $AB$  زاوية ما  
ثم نأخذ على  $AC$  خمسة أبعاد متساوية ولكن  $AD$   $DE$   $EC$   $CF$   $FA$   
ونصل  $AB$  ونرسم من كل من  $D$   $E$   $F$   $C$  مستقيماً موازياً لـ  $AC$  وتقابل في  $AB$   
في  $D'$   $E'$   $F'$   $C'$

فمن حيث أن  $AD$   $DE$   $EC$   $CF$   $FA$  مستقيماً متوازية  
والأجزاء  $AD$   $DE$   $EC$   $CF$   $FA$  كلها متساوية بالعمل  
فإن الأجزاء  $AD'$   $D'E'$   $E'F'$   $F'C'$   $C'A$  تكون متساوية كذلك (نظرية ٢٢)

(طريقة أخرى)

نرسم من  $A$  مستقيماً مثل  $AS$  يصنع مع  $AB$  زاوية ما  
ثم نأخذ على  $AS$  أربعة أبعاد متساوية مثل  $AD$   $DE$   $EC$   $CF$   
 $FA$

ونرسم من  $B$  المستقيم  $BS$  موازياً لـ  $AS$   
ثم نأخذ عليه أربعة أبعاد متساوية مثل  $BD$   $DE$   $EC$   $CF$   $FA$   
 $AB$   $BS$  كل منها يساوي أحد الأبعاد المأخوذة على  $AS$   
ثم نصل المستقيمتين  $DS$   $ES$   $FS$   $CS$   $AS$  فنقطع  
 $AB$  في  $D$   $E$   $F$   $C$   $A$  التي ينقسم المستقيم  $AB$  الى  
خمسة أقسام متساوية



[ وبهذه الطريقة يرجع الى نظريتي ٢٠ و ٢٢ ]

## تمارين على الخطوط والزوايا

## (تمارين تخطيطية)

١ المطلوب رسم زاوية تساوى ٦٠ باستعمال المسطرة والبرجل فقط وتقسيمها الى أربعة اقسام متساوية بطريقة تنصيف الزوايا

٢ قسم الزاوية القائمة الى ثلاثة أقسام متساوية بواسطة التمرين السابق ثم نصف كلا من هذه الأقسام وبذلك بين كيفية تقسيم زاوية ٥٤ الى ثلاثة أقسام متساوية  
[تنبيه - لم يعلم حتى الآن حل لتقسيم أى زاوية الى ثلاثة أقسام متساوية]

٣ المطلوب تقسيم مستقيم طوله ٦,٧ من السنتيمترات الى ٥ أقسام متساوية وقياس أحدها بالبوصة (الأقرب جزء من مائة) وتحقيق الناتج بالحساب (مع العلم بأن السنتيمتر = ٠,٣٩٣٧ من البوصة)

٤ المطلوب تقسيم مستقيم طوله ٧,٤ من السنتيمترات الى ٧ أقسام متساوية ثم قياس أحدها بالسنتيمترات الى اقرب مليمتر وتحقيق الناتج بالحساب

٥ ا ب مستقيم معلوم ونقطة ص مفروضة عليه أقنا منها عليه العمود ص د الذى طوله ٦ سنتيمترات رسمنا د ه مائلا طوله ١٠ سنتيمترات تلاقى مع ا ب فى ح والمطلوب قياس ص د

## (تمارين عملية)

## (اشرح كيفية العمل مع البرهان)

٦ المعلوم مستقيم مثل ص و ونقطتان مثل ا ب والمطلوب تعيين نقطة على هذا المستقيم تكون على بعدين متساويين من ا ب متى يستحيل الحل

٧ المطلوب تعيين نقطة على المستقيم المعلوم ص و بحيث تكون على بعدين متساويين من مستقيمين متقاطعين مثل ا ب ا ب متى يستحيل الحل

٨ المطلوب مد مستقيم من نقطة مفروضة يصنع مع آخر معلوم زاوية تساوى مقدارا معلوما

٩ ا ب مستقيم معلوم ح د ه نقطتان خارجتان عنه فى جهة واحدة منه والمطلوب رسم مستقيمين منهما على شرط أن يتلاقيا على ا ب ويصنعا معه زاويتين متساويتين

[العمل - نزل من ح العمود د ه على ا ب ونمده على استقامته الى ح بحيث يكون

ه ح = د ه ثم نصل د ه فيقطع ا ب فى و

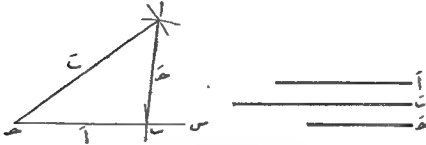
نصل د ه و ثم نبرهن على أن د ه و د ه هما المستقيمان المطلوبان]

١٠ ارسم مستقيما يمر بنقطة مفروضة مثل ح بحيث يكون العمودان النازلان عليه من نقطتين معلومتين مثل ا ب متساويين وبين ان كانت هذه المسألة ممكنة الحل دائما

## في إنشاء المثلثات

### عملية ٨

المطلوب إنشاء المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة



فرض ان  $ا > ب > ج$  أطوال الأضلاع الثلاثة للمثلث

العمل - نرسم المستقيم  $س ب$  ونأخذ عليه البعد  $س ب = ا$

ثم نركز في  $ب$  وننصف قطريساوي  $ج$  نرسم قوسا

ثم نركز في  $س$  وننصف قطر  $ب = ج$  نرسم قوسا آخر يقطع الأول في  $أ$

نصل  $أ ب ا >$

فيكون  $أ ب ج$  المثلث المطلوب لأن الأضلاع  $ب > ا > ج$  تساوي على الترتيب

$ب > ا > ج$

ملاحظة - الفروض الثلاثة  $ا > ب > ج$  إما أن يحل على مستقيمت تساوي في الطول

أضلاع المثلث المراد إنشاؤه أو على أعداد دالة على أطوال هذه الأضلاع بأي وحدة كانت كالستيمتر أو البوصة

تنبيه ١ - لا يمكن حل المسألة المتقدمة يلزم أن يكون مجموع أي ضلعين في المثلث أكبر من

الثالث (نظرية ١١) لأنه اذا لم يتوفر هذا الشرط وركزنا في  $ب > ا$  لا يتقاطع القوسان في  $أ$

تنبيه ٢ - اذا ركنا في  $ب > ا$  ورسمنا قوسين فانهما يتقاطعان في  $أ$  ويتقاطعان كذلك

في نقطة أخرى في الجهة الثانية من المستقيم  $ب$  اذا مددنا القوسين وعلى ذلك فالمسألة حلان

### ملاحظة على انشاء المثلثات

قد رأينا مما تقدم في صفحة ٥٥ أنه للبرهنة على امكان انطباق المثلثين كل على الآخر تمام الانطباق يلزم أن تساوى ثلاثة أجزاء من أحدهما نظائرها من الثاني لكن يجب في الأجزاء المذكورة أن تكون مقيدة بشروط مخصوصة إن لم تتوفر لا يلزم انطباق المثلثين

وعلى ذلك يتعين المثلث شكلا ومساحة متى علمت منه ثلاثة أجزاء بشروط مخصوصة

فمثلا يمكن انشاء المثلث اذا علم منه

(أولا) ضلعان (ب ٦ ج ٦) والزاوية المحصورة بينهما (١)

وطريقة العمل في هذه الحالة واضحة

(ثانيا) زاويتان (ب ٦ ا ٦) وضلع (٦)

فلكون الزاويتين ا ٦ ب معلومتين يمكن إيجاد الزاوية الثالثة ج من المتساوية

$$١٨٠ = ا + ب + ج$$

ويكفي لانشاء المثلث أن نرسم مستقيما = ٦ نجعله قاعدة ونرسم من نهايتيه مستقيمين يصنعان معه

زاويتين تساوى احدهما ب والأخرى ج

فالزاوية الحادثة من تلاقى هذين المستقيمين يجب ان تساوى

الزاوية الثالثة ا

(ثالثا) اذا علم من المثلث زوايا المثلث ا ٦ ب ٦ ج (على شرط ألا يعلم مع هذا ضلع من

أضلاعه) وأريد انشاؤه فانه يمكن انشاء عدة مثلثات زوايا كل منها تساوى نظائرها من الزوايا المعلومة

لأننا اذا رسمنا مستقيما وأخذنا عليه طولاً ما وجعلناه قاعدة ورسمنا من نهايتيه مستقيمين يصنعان معها

زاويتين تساوى احدهما زاوية من الزوايا المعلومة (ب مثلا) وتساوى الأخرى ج فان الزاوية الثالثة الحادثة

من تلاقى هذين المستقيمين تساوى نظيرتها ا وبهذه الطريقة يمكن رسم عدة مثلثات على قواعد مختلفة

زوايا كل منها تساوى الزوايا المعلومة

وعلى ذلك فلسأله لانه لا نهاية لعدد حلولها وذلك لان الأجزاء الثلاثة المعلومة مرتبط بعضها ببعض ارتباطا

خاصا بحيث لو علم منها اثنان علم الثالث

ويشترط في الأجزاء الثلاثة المعلومة من المثلث المراد انشاؤه ألا يكون بينها مثل هذا الارتباط

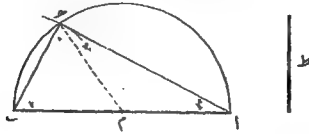
وقال للقروض التي ليس بينها مثل هذا الارتباط أنها مطلقة أى أن كلا منها قائم ذاته لا يتقيد

بالفرضين الآخرين ولا يتوقف عليهما فلا يعلم متى علما ولا يتبعهما اذا تغيرا



## عملية ١٠

المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية انا علم منه الوتر وأحد الضلعين الآخرين



فترض أن AB الوتر المعلوم ط الضلع المقروض

العمل - نصف AB في م ونرقيها وننصف قطر يساوي م نرسم نصف محيط دائرة  
ثم نرقي في ب وننصف قطر يساوي ط نرسم قوساً يقطع نصف المحيط في د

نصل م د ١ د ٦ د

فيكون المثلث المطلوب

البرهان - نصل م د

لمن حيث أن م د = م د

∴ م د = م د

ومن حيث أن م د = م د

∴ م د = م د

∴ الزاوية الكلية م د ب = م د ب + م د ب

(نظرية ١٦)  $180 \times \frac{1}{4} =$

٩٠ =

## تمارين على إنشاء المثلثات (تمارين تخطيطية)

١ ارسم مثلثاً أطوال أضلاعه  $٧,٥$  من السنتيمترات  $٦,٢$  من السنتيمترات  $٥,٣$  من السنتيمترات ثم ارسم وقس الأعمدة النازلة من رؤوسه على الأضلاع المقابلة لها [تنبه - هذه الأعمدة تتقاطع في نقطة واحدة اذا رسمت بالدقة كما سيبتين بعد في صفحة ٢٢٦]

٢ ارسم المثلث  $ا ب ج$  الذي فيه  $ا = ٦$  سنتيمترات  $ب = ٥$  سنتيمترات  $ج = ٥$  سنتيمترات ثم نصف  $ا$  بمستقيم يقابل القاعدة في  $س$  وقس  $ب$   $س$   $ج$   $س$  (لأقرب مليمتراً) واستخرج مقدار  $\frac{ب}{س}$  الى رقم واحد عشري وقارن الناتج بمقدار  $\frac{ب}{س}$

٣ مزرة على شكل مثلث طول ضلعي من أضلاعه  $٣١٥$  متراً  $٢٦٠$  متراً والزاوية المحصورة بينهما  $٣٩^\circ$  والمطلوب رسم شكل (مقياس رسمه سنتيمتر لكل  $٥٠$  متراً) وإيجاد طول الضلع الثالث بواسطة القياس

٤ قطعة أرض على شكل مثلث مثل  $ا ب ج$  قاعدته  $ب ج = ٧٥$  متراً  $ا ب = ٤٧$  متراً  $ا ج = ٦٨$  والمطلوب رسم شكل لذلك (مقياس رسمه سنتيمتر لكل  $١٠$  أمتار) وإيجاد مقدار  $ا$  بدون أن تقاس وطول كل من الضلعين الآخرين بواسطة القياس وكذلك العمود النازل من  $ا$  على  $ب ج$

٥ خرجت سفينة من ميناء متجهة نحو الشمال الشرقي بسرعة  $٩$  كيلومترات في الساعة وبعد  $٢٠$  دقيقة غيّرت اتجاهها نحو الشمال الغربي ومارت مدة  $٣٥$  دقيقة بالسرعة نفسها فما بعدها الآن عن الميناء واذا أرادت الرجوع فأي اتجاه (على وجه التقريب) تتجه اليه في سيرها . ضع لذلك خريطة مقياس رسمها سنتيمتران لكل كيلومتر

٦ ارسم مثلثاً قائم الزاوية وتره  $ا ب = ١٠,٦$  من السنتيمترات وضلعه  $ب ج = ٦$  من السنتيمترات ثم قس مقدار الضلع الثالث  $ا ج$  واستخرج مقدار  $\frac{ا ج}{ب ج}$  وقارن المقدارين

٧ ارسم مثلثاً فيه  $ا ب = ٣٤$  والضلع  $ب ج = ٥$  من السنتيمترات  $ا ج = ٨,٥$  من السنتيمترات وبين أن للسألة حلين ثم قس كلا من مقداري  $ا$  في المثلثين الحاديين ومقداري  $ا ب$  وبين أن مقدارها في أحدهما يكمل مقدارها في الآخر

٨ في المثلث  $ا ب ج$  الزاوية  $ا = ٥٠^\circ$  والضلع  $ب ج = ٦,٥$  من السنتيمترات ويراد رسم مثلث فيه (أولاً)  $ا = ٧$  سنتيمترات و(ثانياً)  $ب ج = ٦$  سنتيمترات و(ثالثاً)  $ا = ٥$  سنتيمترات و(رابعاً)  $ب ج = ٦$  سنتيمترات . بين بالرسم كل الحلول الممكنة في كل حالة

٩ طريقان متعامدان في  $ا$  تقطعهما ترعة مستقيمة أحدهما في  $ب$  والآخر في  $ج$  حيث أقيمت في كل منهما قنطرة فانما كانت المسافة بين القنطرتين  $ب ج = ٦$  هي  $٦١$  متراً والمسافة بين ملتقى الطريقين  $ا$  والقنطرة  $ب ج$  هي  $٢٦١$  متراً فانه يطلب وضع رسم يمكن به معرفة طول المسافة من  $ا$  الى  $ب$  بالقياس

## تمارين عملية

( اشرح كيفية العمل مع البرهان )

١٠ ارسم مثلثا متساوي الساقين قاعدته = ٤ مستقيمتان وارتفاعه ٦,٢ من الستيمترات ثم برهن على أن الساقين متساويان وقس كلا منهما الى اقرب مليمترا

١١ ارسم مثلثا متساوي الساقين زاوية رأسه تساوي زاوية معلومة والعمود النازل من الرأس على القاعدة يساوي طول معلوما

ومن ذلك بين طريقة رسم مثلث متساوي الأضلاع طول العمود النازل من أحد رؤوسه على الضلع المقابل له يساوي ٦ ستيمترات ثم قس أحد أضلاعه الى اقرب مليمترا

١٢ ارسم المثلث ا ب ج الذي فيه العمود النازل من ا على ب ج يساوي ٥ ستيمترات والضلع ا ب = ٨ من الستيمترات ج ا = ٦ = ٩ ستيمترات ثم قس ب ج

١٣ ارسم المثلث ا ب ج الذي فيه الزاويتان ب ج = ٦ تساوي إحدهما الزاوية المعلومة ل والثانية تساوي زاوية معلومة أخرى هي ٢ والعمود النازل من ا على ب ج يساوي مستقيما معلوما مثل ٥

١٤ ارسم مثلثا مثل ا ب ج (بدون استعمال المنقلة) معلوما منه الزاويتان ب ج = ٦ والضلع ب ج

١٥ ارسم مثلثا متساوي الساقين قاعدته تساوي طول معلوما وزاوية رأسه تساوي الزاوية المعلومة ل

١٦ ارسم مثلثا قائم الزاوية معلوما منه الوتر ج و مجموع الضلعين الآخرين ٦ ج ٦ ب وإذا كان ج = ٣ من الستيمترات ٦ ا + ب = ٧,٣ من الستيمترات فانه يراد إيجاد كل من ا ٦ ب بالرسم واستخراج مقدار ٦٢ ب ب الحساب

١٧ ارسم مثلثا اذا علم منه محيطه وزاويتا القاعدة فاذا كان ٦ ب + ج = ١٢ ستيمترا ٦ ب = ٧,٠ ٦ ج = ٨,٠ فائتني المثلث

١٨ ارسم المثلث ا ب ج اذا علم أن الضلع ٦ = ٦,٥ من الستيمترات وبمجموع الضلعين الآخرين يساوي ١٠ ستيمترات ٦ ب = ٩,٠

ثم قس كلا من الضلعين الآخرين ب ٦ ج

١٩ ارسم المثلث ا ب ج اذا علم أن ٦ = ٧ ستيمترات ٦ ج = ٦ ب = ستيمترا واحدا ٦ ب = ٥,٥ ثم قس طول كل من ب ٦ ج



### في إنشاء الأشكال الرباعية

قد رأينا أننا المثلث يتعين شكلا ومساحة اذا علمت مقادير أضلاعه الثلاثة أما الشكل الرباعي فلا يمكن تعيينه تماما من فروض أربعة بل يجب لإنشاء الشكل الرباعي خمسة فروض مطلقة كما سيتبين بعد

#### عملية ١١

المطلوب إنشاء الشكل الرباعي المعلوم منه زاوية وأضلاعه الأربعة



فترض أن  $\Gamma$  و  $\Delta$  و  $\epsilon$  و  $\delta$  أطوال أضلاع الشكل وأن  $\alpha$  الزاوية المعلومه المحصورة بين الضلعين  $\Gamma$  و  $\Delta$

العمل - نرسم مستقيما مثل  $\Gamma$  و  $\Delta$  ونأخذ عليه البعد  $\Gamma$  = الطول  $\Gamma$

ثم نرسم  $\Delta$   $\Gamma$   $\Delta$  =  $\Delta$   $\Gamma$   $\Delta$  المعلومه

ونأخذ على  $\Gamma$   $\Delta$   $\Gamma$   $\Delta$  =  $\Gamma$   $\Delta$   $\Gamma$   $\Delta$  الطول  $\Delta$

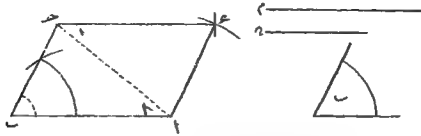
ثم نرسم في  $\Delta$  وننصف قطر  $\Delta$  = نرسم قوسا ونرسم في  $\Gamma$  وننصف قطر  $\Gamma$  = نرسم قوسا آخر يقطع الأول في  $\delta$

نصل  $\delta$   $\Gamma$   $\Delta$   $\delta$

فيكون  $\Gamma$   $\Delta$   $\delta$  هو الشكل الرباعي المطلوب لأن أضلاعه تساوى الأطوال  $\Gamma$  و  $\Delta$  و  $\epsilon$  و  $\delta$  للزاوية المعلومه  $\alpha$   $\Gamma$   $\Delta$   $\delta$  = الزاوية المعلومه

عملية ١٢

المطلوب إنشاء متوازي الأضلاع المعلوم منه ضلعان متجاوران والزوايا المحصورة بينهما



نفرض أن  $a \neq b$  طول الضلعين المعلومين وأن  $b$  الزاوية المعروفة

العمل - (أولاً) طريقة المسطرة والبرجل

نرسم المستقيم  $ab = a$  ثم نرسم من النقطة  $b$  الزاوية  $b$   $ab = b$  ونجمل  $b$  مساوياً  $b$

ثم نرسم  $a$  وننصف قطر  $a$  ونرسم قوساً ونرسم قوساً آخر

يقطع الأول في  $a$  فيكون  $a$  متوازي الأضلاع المطلوب

البرهان - نصل القطر  $ac$

في المثلثين  $abc$  و  $acd$

$ab = cd$

$bc = ad$

$a$  مشترك

(نظرية ٧)  $\therefore \angle bac = \angle acd$

ولكونهما متبادلتين يكون  $a$  موازياً  $ab$

ولكون  $ab = cd$  أيضاً

(نظرية ٢٠)  $a$  موازياً  $a$  ويساويه

$a$  متوازي الأضلاع المطلوب

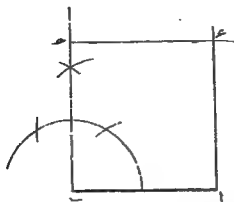
(ثانياً) طريقة المثلثات

نرسم  $ab$   $a$  كما تقدم وبواسطة المثلثات نرسم  $a$  موازياً  $ab$  وبهما

أيضاً نرسم  $a$  موازياً  $a$  وموزياً  $a$

فيكون  $a$  متوازي الأضلاع بالعمل وهو المطلوب

المطلوب إنشاء المربع المعلوم ضلعه



∴ احوال و مروج

## تمارين على إنشاء الأشكال الرباعية

١ ارسم معينا ضلعه يساوى طولاً معلوماً وأحد قطريه يساوى هذا الطول كذلك وأوجد مقدار كل زاوية من زواياه دون أن تقيسها وبرهن على ذلك

٢ ارسم مربعا طول ضلعه ٥ سنتيمترات وبرهن على أن قطريه متساويان وحقن صحة الرسم بقياس كل من هذين القطرين الى أقرب مليمترا

٣ ارسم مربعا طول قطره ٦ سنتيمترات وقس كل ضلع على حدته وأوجد المتوسط للأقيسة الأربعة

٤ ارسم متوازي الأضلاع  $ABCD$  على فرض أن أحد أضلاعه هو  $AB = ٥,٥$  من السنتيمترات والقطر  $AC = ٨$  سنتيمترات والقطر  $BD = ٦$  سنتيمترات وقس  $AD$

٥ شكل رباعي قطراه متساويان ( طول كل منهما ٦ سنتيمترات) يمر كل ضلع منهما بمقتصف الآخر ويصنع معه زاوية تساوى  $٩٠^\circ$ . بين أن فروض هذه المسألة خمسة مطلقة

ثم اثبت الشكل الرباعي واذكر نوعه وبرهن على ذلك وقس محيطه وأوجد مقدار زيادة هذا المحيط في المائة اذا فرض أن الزاوية المحصورة بين قطريه زادت الى أن صارت  $٩٠^\circ$

٦  $ABCD$  شكل رباعي فيه  $AB = ٦,٥$  من السنتيمترات  $BC = ٥$  من السنتيمترات  $CD = ٤$  سنتيمترات  $AD = ١$  من السنتيمترات

بين أن هيئة الشكل لا يمكن تعيينها من هذه الفروض

ارسم الشكل المذكور في حالة ما اذا كانت  $AD = ١,٥$  وفيما اذا كانت تساوى  $٦٠$  وبين السبب في عدم امكان رسم الشكل في حالة ما اذا كانت  $AD = ١٠٠$

وأوجد تخطيطيا أقل مقدار لزاوية  $A$  لا يمكن معه رسم الشكل

٧ كيف ترسم شكلا رباعيا اذا علمت أضلاعه الأربعة وأحد أقطاره

وما هي الشروط التي يلزم أن تتوفر في الفروض المذكورة حتى يمكن حل المسألة

بين الطريقة لذلك بأن ترسم الشكل الرباعي  $ABCD$  اذا كان

(أولا)  $AB = ٣$  بوصات  $BC = ١,٧$  من البوصات  $CD = ٥$  من البوصات  $DA = ٢,٥$  من البوصات

$AD = ٢,٨$  من البوصات والقطر  $BD = ٢,٦$  من البوصات ثم قس  $AC$

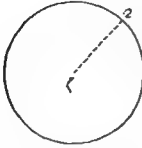
(ثانيا)  $AB = ٣,٦$  من السنتيمترات  $BC = ٧,٧$  من السنتيمترات  $CD = ٦,٨$  من السنتيمترات

$AD = ١$  من السنتيمترات والقطر  $AC = ٨,٥$  من السنتيمترات ثم قس كلا

من الزاويتين  $B$  و  $C$

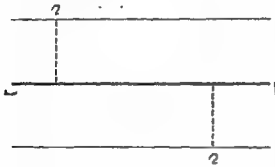
### الحل الهندسي

تعريف - الحل الهندسي لنقطة هو مسار هذه النقطة مقيدة بشروط مخصوصة أثناء سيرها



فتلا (١) اذا فرضنا أن نقطة ٢ تسير حول نقطة ١ على شرط مخصوص وهو أن يكون بعدها عن ١ دائماً ثابتاً لا يتغير (وليكن ١,٧ من السنتيمترات) فمسار هذه النقطة مقيدة بهذا الشرط هو محيط الدائرة التي مركزها ١ ونصف قطرها البعد الثابت (١,٧ من السنتيمترات المفروض) وهذا المحيط هو الحل الهندسي للنقطة ٢

(٢) اذا فرضنا أن النقطة ٢ تسير على بعد ثابت لا يتغير من المستقيم المعلوم أ ب (وليكن هذا البعد



سنتيمترا ونصف سنتيمترا مثلا) فإن الحل الهندسي لهذه النقطة في هذه الحالة هو أحد المستقيمين الموازيين للمستقيم المعلوم المرسومين كل في جهة منه على البعد الثابت (السنتيمتر والنصف) المفروض

ومن هذا نرى أن الحل الهندسي لنقطة تسير حسب شرط معين هو خط أو أكثر تقيد النقطة به

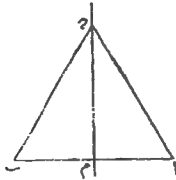
في سيرها عليه على شرط أن يكون جميع نقط هذا الخط ما لهذه النقطة من الخواص وألا تتوفر هذه الخواص في أي نقطة أخرى خارجة عنه

أي أن خط الحل الهندسي تشترك جميعها في خاصية واحدة لا تشترك معها في أي نقطة أخرى خارجة عنه

وعلى ذلك يكفي لتحديد الحل الهندسي لنقطة تسير مقيدة بشروط معينة أن توجد سلسلة نقط كل منها تستوفي هذه الشروط وتربها النقطة المتحركة المراد تعيين محلها الهندسي

## عملية ١٤

المطلوب إيجاد المحل المنتمى للنقطة (د) التي يدها عن التقاطعين المعلومتين: (ا ٦ ب) دائما متساويان



يؤخذ من هذا أن النقطة د في جميع أوضاعها أثناء سيرها يجب أن يكون يدها عن ا ٦ ب دائما متساويين أي أن د ا = د ب

وعلى ذلك فتتصف ا ب وهو م يكون أحد أوضاع هذه النقطة أي أن م إحدى نقط المحل المنتمى فإذا فرضنا أن نقطة د هي أيضا إحدى نقط هذا المحل ووصلنا م د

حدث في المثلثين د م ا د م ب أنه

$$د ا = د ب$$

٦ م مشترك

$$د م = د م$$

من حيث أن

$$د ا د ب = د م د م$$

(نظرية ٧)

وعليه فالمستقيم د م عمود على ا ب من وسطه

ويكون هو المحل المنتمى المطلوب

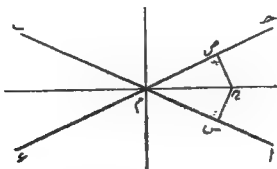
وذلك لأنه

(أولا) ثبت أن كل نقطة مثل د على بسطين متساويين من ا ٦ ب تكون إحدى نقط العمود المقام على ا ب من وسطه

(ثانيا) تسهل البرهنة على أن كل نقطة من نقط العمود المقام من م على ا ب تكون على بسطين متساويين من ا ٦ ب

## عملية ١٥

المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقطة (د) التي يحددها عن المستقيمين المعلومين (ا ب و ح د) ،  
دائما متساويان



فرض أن المستقيمين المعلومين ا ب و ح د يتقاطعان في م وأن د أحد أوضاع النقطة الملوحة  
فلو أنزلنا من د العمود دس على ا ب والعمود دص على ح د  
لحدث على فرض المسألة أن

$$دس = دص$$

د م يحدث

فاذا وصلنا

$$دس م دص م أنه$$

في المثلثين

بالقياس

$$دس م = دص م$$

م مشترك

بالقوس

$$دس = دص$$

(نظرية ١٨)

ينطبق المثلثان كل على الآخر تمام الانطباق

$$دس م = دص م$$

ومنه ينتج أن

$$د م ينصف ا ب$$

أي أن المستقيم

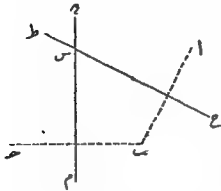
وعليه فإن كانت النقطة د داخل هذه الزاوية فتقيدها بشروط المسألة يستلزم أن تكون على  
منصف الزاوية

ولو كانت د داخل ا ب م لكانت على منصف هذه الزاوية كذلك

وينتج من ذلك أن كلا من المستقيمين اللذين نصفان الزوايا المحصورة بين المستقيمين المعلومين هو  
المحل الهندسي المطلوب

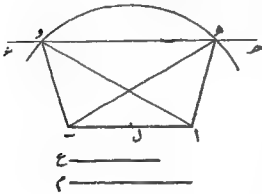
## تقاطع المحال الهندسية

من فوائد المحال الهندسية أنه يمكن تعيين موضع أى نقطة تتقيد بشرطين وذلك لأن لكل شرط منهما محلاً هندسياً خاصاً به تسير فيه هذه النقطة فتقاطع هذين المحلين تستوفى الشرطين معاً في آن واحد فنلاحظ (١) إذا أريد تعيين نقطة على أبعاد متساوية من ثلاث نقط معلومة مثل  $أ ب ١$   $ب ٦$   $٦ ١$  ليست على استقامة واحدة يلاحظ



(أولاً) أن المحل الهندسى للنقطة المتساوية البعد عن  $أ ب ١$  هو العمود  $ح ط$  المقام على  $أ ب$  من وسطه  
(ثانياً) أن المحل الهندسى للنقط المتساوية البعد عن  $ب ٦$   $٦ ١$  هو العمود  $م د$  المقام على المستقيم  $ب ٦$  من وسطه  
فالنقطة المشتركة بين هذين العمودين وهى نقطة تقاطعهما  $س$  تستوفى الشرطين في آن واحد أى أنها على أبعاد متساوية من النقط  $أ ب ١$   $ب ٦$   $٦ ١$

(٢) المطلوب إنشاء المثلث اذا علم منه قاعدته وارتفاعه وطول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة  
فترض أن  $أ ب$  قاعدة المثلث المطلوب انشاؤه وإن  $ع$  طول ارتفاعه  $٦ ٦$  طول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة  
فإذا علم وضع رأس المثلث أمكن انشاؤه  
ولذلك (أولاً) نرمم المستقيم  $س د$  يوازي  $أ ب$  ويبعد عنه بمقدار يساوى الارتفاع  $ع$   
فيكون رأس المثلث المطلوب احدى نقط هذا الموازي  
(ثانياً) نرسم في  $ل$  منتصف  $أ ب$  وننصف قطر  
يساوى المستقيم المتوسط  $م$  نرمم محيط دائرة  
فيكون رأس المثلث المطلوب احدى نقط هذا المحيط



فالنقطة المشتركة بين المستقيم  $س د$  والمحيط اذن تستوفى الشرطين المقروضين  
أى أنه اذا قطع المستقيم  $س د$  محيط الدائرة في النقطتين  $هـ ٦$   $و$  فإن كلا منهما تكون رأساً للمثلث المطلوب انشاؤه . هنا على فرض أن المستقيم المتوسط  $م$  أكبر من الارتفاع  $ع$   
وقد ترتبط فروض المسألة بعضها ببعض بحيث لا تؤدي الى تقاطع المحلين الهندسيين فتكون المسألة غير ممكنة الحل كما لو كانت في المسألة السابقة المستقيم المتوسط أصغر من الارتفاع فنحن نلاحظ لا يتقاطع المستقيم  $س د$  والمحيط

ملاحظة — ينبغى في مسائل تقاطع المحال الهندسية أن يبحث دائماً في الارتباطات التي يجب أن توجد بين فروض المسألة حتى يمكن حلها فان لوحظ ان للمسألة حلين لارتباطات مخصوصة بين الفروض وأن لاحل لها اذا تغيرت هذه الارتباطات فانه لا بد أن يوجد بين الارتباطات الأولى والثانية وسط ترتبط به الفروض ارتباطاً يتحد به الحلان ويصير للمسألة حل واحد



## تمارين على المحال الهندسية

- ١ المطلوب تعيين المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعد ثابت من محيط دائرة معلومة (البعد هنا هو المسافة بين النقطة والمحيط على المستقيم الواصل بينها وبين المركز)
- ٢ المعلوم المستقيم  $AB$  ونقطة  $C$  متحركة عليه . في أي وضع تكون  $C$  على بعدين متساويين من نقطتين آخريين مفروضتين خارج المستقيم  $AB$
- ٣ المعلوم قطعتان داخل دائرة والمطلوب تعيين قاطع على المحيط كل منها على بعدين متساويين من النقطتين المعلومتين . ما عدد هذه القاطعات
- ٤ المعلوم المستقيم  $AB$  ونقطة  $C$  متحركة عليه . في أي وضع تكون  $C$  على بعدين متساويين من المستقيمين المعلومين  $CD$  و  $CE$  و  $6$  و
- ٥  $AB$  قطعتان ثابتتان البعد بينهما  $6$  مستقيمتان والمطلوب إيجاد نقطتين كل منهما على بعد  $4$  مستقيمتان من  $AB$  و  $6$  مستقيمتان من  $B$
- ٦  $AB$   $6$  مستقيمتان معلومان والمطلوب إيجاد القاطع التي تكون على بعد  $3$  مستقيمتان من  $AB$  و  $6$  مستقيمتان من  $C$  . كم حلال لهذه المسألة
- ٧ قضيب طوله معلوم يترقى بين مسطرتين متعامدتين والمطلوب تعيين المحل الهندسي لمتوسطه وبيان أن هذا المحل هو ربع محيط دائرة (راجع عملية ١٠)
- ٨ ماهو المحل الهندسي لرؤوس المثلثات القائمة الزوايا المرسومة على مستقيم معلوم هو وترها
- ٩ المعلوم نقطة ثابتة مثل  $C$  خارج مستقيم مثل  $AB$  ونقطة  $H$  متحركة عليه ويراد تعيين المحل الهندسي لمتوسط  $CH$  والبرهنة على أنه مستقيم يوازي  $AB$
- ١٠ نقطة ثابتة خارج محيط دائرة تتحرك عليه النقطة  $H$  . عين المحل الهندسي لمتوسط  $CH$  و برهن على أنه محيط دائرة (راجع تمرين ٣ صفحة ٦٩)
- ١١  $AB$  مستقيم معلوم  $6$  عمود على مستقيم قاطع مارا بالنقطة  $B$  ماهو المحل الهندسي لمتوسط  $AB$  اذا تحرك  $B$  حول  $B$
- ١٢ المستقيمان  $2$  و  $6$  متعامدان في  $2$  فرضنا نقطة  $A$  مثل  $C$  داخل الزاوية  $2$  من  $2$  وأنزلنا منها العمود  $C$  على  $2$  من  $2$  والمعمود  $C$  على  $2$  من  $2$  والمطلوب تعيين المحل الهندسي للنقطة  $C$  بالرسم اذا كان
  - (أولاً)  $C$  و  $C$  و  $C$  ثابتا (وليكن  $2$  مستقيمتان مثلا)
  - (ثانياً)  $C$  و  $C$  و  $C$  ثابتا (وليكن  $3$  مستقيمتان مثلا)

مع البرهنة على كل من الحالتين

١٣ المستقيان  $m$  و  $n$  متعامدان في  $m$  نقطة ما متحركة أثبتنا منها العمود  $d$  على  $m$  و  $n$  والعمود  $d$  على  $m$  والمطلوب تعيين المحل الهندسي للنقطة  $d$  (بدون أن يبرهن على ذلك) إذا كان

$$(أولاً) \quad d \perp n = d \perp m$$

$$(ثانياً) \quad d \perp n = d \perp m$$

١٤ المطلوب إيجاد نقطة على بعد معلوم من نقطة أخرى مفروضة وعلى بعدين متساويين من مستقيمين متوازيين

متى يكون لهذه المسألة حلان ومتى يكون لها حل واحد ومتى يستحيل

١٥ نقطة ثابتة على بعد  $d$  مستقيمات من المستقيم المعلوم  $a$  والمطلوب تعيين نقطتين على بعد  $\frac{1}{2}d$  من المستقيمات من كل من النقطة  $a$  والمستقيم  $a$

١٦ أوجد جملة نقط كل منها على بعدين متساويين من نقطة معلومة ومستقيم معلوم ثم صل بينها بنقط منح

١٧ المطلوب إنشاء مثلث معلوم منه القاعدة والارتفاع بحيث يكون رأسه على مستقيم معلوم

١٨ المطلوب تعيين نقطة على أبعاد متساوية من أضلاع مثلث

١٩  $m$  و  $n$  مستقيان متعامدان في  $m$  فرضنا النقطة  $a$  على  $m$  والنقطة  $d$  على  $n$  عين المحل الهندسي لمتصف المستقيم  $a$  إذا كان

$$(أولاً) \quad m + n = d \text{ مقدارا ثابتا}$$

$$(ثانياً) \quad m - n = d \text{ مقدارا ثابتا}$$

٢٠  $m$  و  $n$  نقطتان ثابتتان والمطلوب إيجاد عدة نقط مرموز لكل منها بالحرف  $d$  بحيث يكون

$$(أولاً) \quad m + n = d \text{ مقدارا ثابتا (وليكن ٧ مستقيمات)}$$

$$(ثانياً) \quad m - n = d \text{ مقدارا ثابتا (وليكن ٣ مستقيمات)}$$

ثم صل كل هذه النقط بنقط منح في كل من الحالتين



البرهان — من حيث أن  $م$  ينصف  $د ا ب$  ح

فهو المحل الهندسي للنقط التي على أبعاد متساوية من  $د$   $ب$   $ا$

$$\therefore د م = م ب$$

وكذلك  $م$  هو المحل الهندسي للنقط التي على أبعاد متساوية من  $د$   $ب$   $ا$

$$\therefore د م = م ب$$

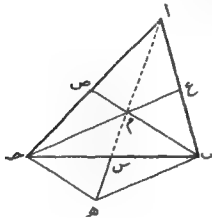
ومنه ينتج أن  $م$   $د م = م ب$

$\therefore$   $م$  احدى قط المحل الهندسي للنقط التي على ابعاد متساوية من  $د$   $ب$   $ا$

وعلى ذلك فمنصفات الزوايا تتلاقى جميعا في نقطة  $م$  وهو المطلوب

٣ المستقيمت المتوسطة للثلث تتلاقى جميعا في نقطة واحدة

نقروض أن  $د ا ب$  مثلث  $د ب ص$   $د ب ع$  مستقيمت متوسطتان ومتلاقيتان في  $م$



نصل  $ا م$  ونعده على استقامته ليقابل  $د$  في  $س$

ونبرهن على أن  $ا س$  ثالث المستقيمت المتوسطة للثلث

لذلك نرمس من  $ب$  المستقيم  $ب هـ$  يوازي  $ع$  ونعده  $ا س$

على استقامته ليقابل  $د$  في  $هـ$  ونصل  $د هـ$

البرهان — في  $د ا ب$

من حيث أن  $ع$  منتصف  $د ب$   $م$  يوازي  $د هـ$

(نظرية ٢٢)

$$\therefore م منتصف ا هـ$$

وكذلك في  $د ا ب$

من حيث أن  $ص$   $م$  منتصفا الضلعين  $د ب$   $د ص$

$$\therefore ص م يوازي د هـ$$

أي أن  $ب م$  يوازي  $د هـ$

$\therefore$  فالشكل  $ب م هـ$   $م$  متوازي الأضلاع

ومن حيث أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر

$$\therefore م منتصف ب هـ$$

أي أن  $ا س$  مستقيم متوسط للثلث

وعليه فالمستقيمت المتوسطة للثلث تتلاقى جميعا في  $م$  وهو المطلوب

تعريف — نقطة تلاقي المستقيمتين المتوسطة للثلث تسمى ملتقى المستقيمتين المتوسطة  
نتيجة — ملتقى المستقيمتين المتوسطة في المثلث على ثلث كل منها من جهة القاعدة والثلثين  
من جهة الرأس

لأنه يتعين في الشكل المتقدم أن

$$أ م = م هـ$$

$$٦ م م نصف م هـ$$

$$٦ م م نصف أ م$$

$$أى أن م م ثلث أ م$$

$$وكذلك م م ثلث ب م$$

$$٦ م ع ثلث ح ع$$

من هذه النتيجة يتبين أن أصغر مستقيم متوسط في المثلث هو الذى ينصف أكبر أضلاعه  
نتيجه — سيأتى البرهان على أن الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الأضلاع المقابلة لها  
تتلاقى فيما في نقطة واحدة

دعاوى عملية متنوعة

( ينبغي البرهنة على كل مسألة من المسائل الآتية )

١ نقطة ما  $6 ب$  مستقيم معلوم والمطلوب رسم مستقيمتين من  $ا$  تصنع مع  $ب$  زوايا كل منها تساوى زاوية معلومة  $م$   
ماعدد هذه المستقيمتين

٢ نصف الزاوية  $ا ب$  بدون استعمال الرأس  $م$  أثناء العمل

٣ نقطة ما مفروضة داخل الزاوية  $ا ب$  والمطلوب رسم مستقيم ينتهى طرفاه بضلعى الزاوية على شرط أن تنصفه النقطة  $د$

٤  $ا ب$   $ا م$   $ب م$   $ا ب$   $م$  ثلاثة مستقيمتين متقاطعة فى  $م$  والمطلوب رسم قاطع لها ينتهى طرفاه بالمستقيمين  $ا م$   $ب م$  على شرط أن يمر  $م$  بنصفه

٥ المطلوب رسم مستقيم يمر بنقطة مفروضة مثل  $ا$  ويكون جزؤه المحصور بين مستقيمين متوازيين معلومين يساوى طولاً معلوماً

مضى يكون لهذه المسألة حلان ومضى يكون لها حل واحد ومضى يستحيل

٦ المطلوب رسم معين داخل المثلث  $ا ب ج$  بحيث تكون احدى زواياه منطبقة على الزاوية  $ا$

٧ استعمال خواص المثلث المتساوى الأضلاع فى تقسيم مستقيم معلوم الى ثلاثة اقسام متساوية

( إنشاء المثلثات )

٨ المطلوب إنشاء المثلث اذا علم منه

(أولاً) فقط متصفاته اضلاعه الثلاثة

(ثانياً) طول ضلعين (كل على حدته) والمستقيم المتوسط الذى ينصف الثالث

(ثالثاً) طول أحد الأضلاع وكل من المستقيمين المتوسطين المتصنين للضلعين الآخرين

(رابعاً) طول كل من المستقيمتين المتوسطتين للثلاثة

## الجزء الثاني

---





## الجزء الثاني

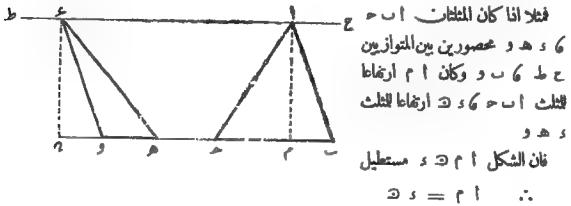
### في المساحات

#### تعريف

١ ارتفاع متوازي الاضلاع هو العمود الذي يقاس به البعد بين أحد اضلاعه المعتبر قاعدة والضلع المقابل له

٢ ارتفاع المثلث هو العمود الذي يقاس به البعد بين أحد رؤوسه والضلع المقابل له المعتبر قاعدة للمثلث

تنبيه - يؤخذ من هذا أن متوازيات الأضلاع أو المثلثات المحصورة بين مستقيمين متوازيين تساوى ارتفاعاتها



مربع



بوصة مربعة



٣ مساحة الشكل هي مقدار ما تحيط به أضلاعه من السطح

٤ المستقيم المربع هو مساحة المربع الذي طول ضلعه مستقيم

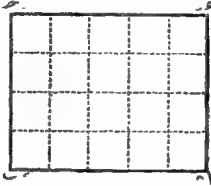
٥ البوصة المربعة هي مساحة المربع الذي طول ضلعه بوصة

وقس على ذلك المتر المربع والياردة المربعة والقدم المربع

٦ وعلى ذلك فوحدة السطوح هي مساحة مربع طول ضلعه وحدة الأطوال

## نظرية ٢٣

مساحة المستطيل — اذا ضربنا عدد الوحدات الدالة على طول قاعدة مستطيل في عدد الوحدات الدالة على طول ارتفاعه فان حاصل الضرب يدل على عدد الوحدات المربعة التي تتكون منها مساحة الشكل



اذا فرضنا أن  $أ ب$   $س$  مستطيل طول قاعدته  $أ ب = ٥$  سنتيمترات وطول ارتفاعه  $٩ = ب$  سنتيمترات

فانه يطلب إثبات أن مساحة المستطيل  $أ ب س = ٥ \times ٩$  من السنتيمترات المربعة  
لذلك نقسم  $أ ب$  الى  $٥$  أقسام متساوية  $٦$  الى  $٩$  من هذه الأقسام  
ونرسم من نقط تقسيم كل منهما مستقيمتين توازي الأخر  
فبذلك ينقسم المستطيل الى أقسام كل منها سنتيمتر مربع  
ومن حيث أن الشكل يحتوي على  $٩$  صفوف أفقية في كل منها  $٥$  مربعات  
∴ يحتوي المستطيل على  $٥ \times ٩$  من السنتيمترات المربعة

فاذا جعلنا  $ع$  رمزاً لعدد الوحدات الطولية الدالة على طول القاعدة  $٦$   $ع$  رمزاً لعدد الوحدات الطولية الدالة على طول الارتفاع فان المستطيل يحتوي على  $ع \times ٦$  من مربعات هذه الوحدات  
واذا كانت  $د$  تدل على عدد وحدات طول ضلع مربع  
فان المربع يحتوي على  $د^٢$  من مربعات هذه الوحدات  
وعلى ذلك تكون

مساحة المستطيل = حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع  $(١) \dots \dots \dots$   
ومساحة المربع = مربع ضلعه  $(٢) \dots \dots \dots$  وهو المطلوب

نتيجة ١ — المستطيلات المتساوية في القاعدة والارتفاع متكافئة أى أنها متساوية في المساحة

نتيجة ٢ — المستطيلات المتكافئة ذات القواعد المتساوية تكون ارتفاعاتها متساوية

تبينه — يكفي تعيين المستطيل أن يلم ضلعاه المتجاوران فانهما يعينان مساحته وشكله واذا  
كان  $أ ب ٦$   $١$  ضلعين متجاورين في مستطيل ما مثل  $أ ب س$  فان حاصل الضرب  $أ ب \times ١$  يدل  
على هذا المستطيل

وكذلك اذا كان  $أ ب$  أحد أضلاع مربع ما مثل  $أ ب س$  فان المقدار  $أ ب^٢$  يدل على هذا المربع

## تمارين على الأطوال والمساحات

١ ارسم شكلا بين أن

(أولا) السنتيمتر المربع = ١٠ من المليمترات المربعة

(ثانيا) الباردة المربعة = ٣ من الأقدام المربعة

(ثالثا) القدم المربع = ١٢ من البوصات المربعة

٢ ارسم شكلا بين أن المربع المرسوم على أى مستقيم يساوى أربعة أمثال المربع المرسوم على نصف هذا المستقيم

٣ إذا كان السنتيمتر في الرسم يدل على ٥ كيلومترات فما هي المساحة التي يدل عليها ٦ سنتيمترات مربعة

## تممة لنظرية ٢٣

قد استعملنا في البرهان على نظرية ٢٣ أعدادا صحيحة لقاعدة المستطيل وارتفاعه واستنتجنا القانون المتقدم

وهذا القانون عام للأعداد الصحيحة والكسرية على السواء فمثلا

إذا فرضنا أن قاعدة مستطيل تساوى ٣,٢ من السنتيمترات وارتفاعه يساوى ٢,٤ من السنتيمترات

فإن مساحة المستطيل = (٣,٢ × ٢,٤) من السنتيمترات المربعة

لأن القاعدة = ٣,٢ من السنتيمترات = ٣٢ مليمتر

والارتفاع = ٢,٤ من السنتيمترات = ٢٤ مليمتر

∴ المساحة = (٣٢ × ٢٤) من المليمترات المربعة

=  $\frac{٢٤ \times ٣٢}{١٠}$  من السنتيمترات المربعة

= (٣,٢ × ٢,٤) من السنتيمترات المربعة

## تمارين على مساحة المستطيل والمربع

ارسم على ورق المربعات مستطيلات بمقدار القاعدة ٥ لكل منها معلوم كما سيأتى وكذلك مقدار الارتفاع ع ثم أوجد مساحة كل بالحساب وعذ المربعات المحصورة بين أضلاعه على الورق للتحقق من النتيجة الحسابية

١	٥ = ٥	ستيمترات	٦ = ٦	ستيمترات
٢	٥ = ١,٥	من الستيمترات	٦ = ٤	»
٣	٥ = ٠,٨	»	٦ = ٣,٥	من الستيمترات
٤	٥ = ٢,٥	»	٦ = ١,٤	»
٥	٥ = ٢,٢	»	٦ = ١,٥	»
٦	٥ = ١,٦	»	٦ = ٢,١	»

أوجد بالحساب مساحة كل من المستطيلات التي أبعادها كما يأتي

٧ ٥ = ١٨ مترا ٦ = ١١ مترا

٨ ٥ = ٤ ديسمترات ٦ = ٨٢ ستيمترا

٩ ٥ = ٢,٥ من الكيلومترات ٦ = ٤ أمتار

١٠ ٥ =  $\frac{1}{4}$  كيلومتر ٦ = ١ ستيمترا

١١ المطلوب إيجاد ارتفاع المستطيل الذي مساحته ٣٠ ستيمترا مربعا وقاعدته ٦ ستيمترات وتحقق النتائج الحسابي برسم هذا المستطيل على ورق المربعات وعدّ ما فيه من المربعات

١٢ المطلوب حساب قاعدة مستطيل مساحته ٣,٩ من الستيمترات المربعة وارتفاعه ١,٥ من الستيمترات وتحقق النتائج الحسابي برسم هذا المستطيل على ورق المربعات وعدّ ما فيه من المربعات

١٣ (أولا) كم مرة نكرر مساحة مستطيل إذا ضوعفت قاعدته ثلاث مرات ولم يتغير مقدار ارتفاعه (ثانيا) كم مرة نكرر مساحة مستطيل إذا ضوعف كل من قاعدته وارتفاعه ثلاث مرات ارسم شكلا يبين ذلك في كل حالة واذكر قانونا عاما تستنتجه لذلك

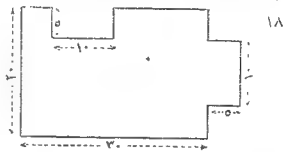
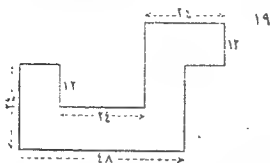
١٤ حديقة على شكل مستطيل قاعدته في الرسم تساوي ٣,٦ من الستيمترات وارتفاعه ٢,٥ من الستيمترات فما مساحته اذا كان مقياس الرسم ستيمترا لكل ١٠ أمتار وان زادت مساحة الحديقة ٣٠٠ متر مربع فما طولها اذا لم يتغير العرض وكم ستيمترا تدل على هذا الطول في الرسم

١٥ مامساحة حوش على شكل مستطيل قاعدته في الرسم ٦,٥ من الستيمترات وارتفاعه ٥,٥ من الستيمترات (ومقياس الرسم ١ ستيمتر لكل ٢٠ مترا)

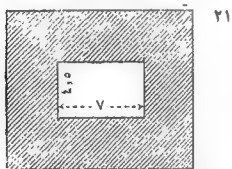
١٦ رسم مستطيل مساحته ١٤٤٠ مترا مربعا فكانت قاعدته في الرسم ٥,٥ من الستيمترات وارتفاعه ٣,٢ من الستيمترات مامقياس الرسم

١٧ منزوعة على شكل مستطيل مساحتها ٥٢٠٠ قدم مربع رسمت بمقياس ستيمتر واحد لكل ١٠٠ قدم فاذا كانت قاعدة المستطيل تساوي ٣,٢٥ من الستيمترات فما طول ارتفاعه

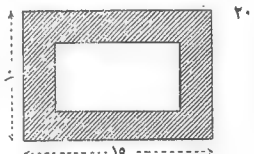
المطلوب حساب مساحة قطع الأرض الآتية أشكالها مع العلم بأن جميع زواياها قوائم وقياس أبعادها بالأمتار



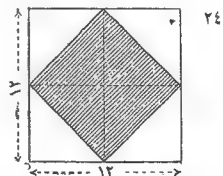
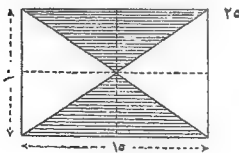
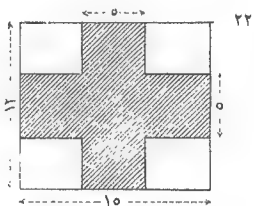
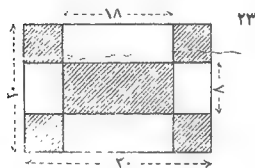
المطلوب حساب مساحة الجزء المظلل في كل من الأشكال الآتية مع العلم بأن قياس أبعادها بالأمتار



عرض الجزء المظلل ٤ أمتار

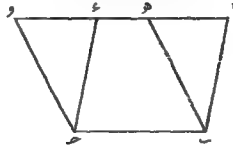


عرض الجزء المظلل ٢٠٥ من الأمتار



## نظرية ٢٤

متوازي الأضلاع المتحدان في القاعدة والمحصوران بين مستقيمين متوازيين متكافئان



نفرض أن  $ا ب د ه$  و  $ا ب د ه$  و شكلان متوازي الأضلاع متحدان في القاعدة  $ب د$  ومحصوران بين المتوازيين  $ا ب$  و  $ا د$

ويطلب البرهنة على أن  $ا ب د ه = ا ب د ه$  في المساحة

البرهان - في المثلثين  $ا ه ب$  و  $ا ه د$

$$ا ب = ا د$$

(نظرية ٢١)

(بالتناظر نظرية ١٤)

$$ا ه ب = ا ه د$$

$$ا ب د ه = ا ب د ه$$

(نظرية ١٧)

$$ا ه ب = ا ه د$$

وعليه فلو طرحنا  $ا ه ب$  من الشكل الكلي  $ا ب د ه$  وكان الباقي متوازي الأضلاع  $ا ب د ه$

ولو طرحنا  $ا ه د$  من الشكل الكلي  $ا ب د ه$  وكان الباقي متوازي الأضلاع  $ا ب د ه$

هذان الباقيان متساويان

أي أن متوازي الأضلاع  $ا ب د ه = ا ب د ه$  متوازي الأضلاع  $ا ب د ه$  وهو المطلوب

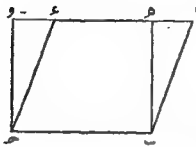
تمرين

المطلوب اثبات هذه النظرية في حالة ما اذا كان الضلعان  $ا ب$  و  $ا د$  ليس بينهما جزء مشترك (راجع الشكل) وذلك

(أولاً) بأن وقمت النقطة  $ه$  على النقطة  $د$

(ثانياً) بأن وقمت النقطة  $ه$  على امتداد  $ا د$

### مساحة متوازي الأضلاع



ليكن  $ا ب د هـ$  شكلا متوازي الأضلاع  $ا ب د هـ$  و  $ا ب د هـ$

مستطिला قاعدة كل منهما  $ا ب$  وارتفاعه  $هـ ب$

فعلى نظرية ٢٤ تكون

مساحة متوازي الأضلاع  $ا ب د هـ$  = مساحة المستطيل

$ا ب د هـ$

$$ا ب د هـ = ا ب \times هـ ب$$

$$= القاعدة \times الارتفاع$$

نتيجة — من حيث ان مساحة متوازي الأضلاع لا ترتبط إلا بقاعدته وارتفاعه فتوازيات الأضلاع  
ذوات القواعد المتساوية والارتفاعات المتساوية متكافئة

## تمارين

(عددية وتخطيطية)

١ مامساحة متوازي الأضلاع انا كانت

(أولاً) قاعدته = ٥,٥ من السنتيمترات وارتفاعه = ٤ سنتيمترات

(ثانياً) قاعدته = ٢,٤ من الأمتار وارتفاعه = ١,٥ من الأمتار

٢ ارسم متوازي الأضلاع ا ب د ه مع العلم بأن ا ب = ٦ سنتيمترات ا د = ٤ سنتيمترات  
٦ د ا = ١٥٠ ثم انزل من نقطة د عموداً على ا ب وقس واحسب مساحة متوازي الأضلاع من  
ذلك بالتقريب وبين لم تكون هذه المساحة تقريبية

ثم انزل من نقطة ب عموداً على ا د وقس واحسب مساحة الشكل من حاصل ضرب طول هذا  
العمود في طول ا د ثم أوجد متوسط المساحتين الناتجين

٣ شكل متوازي الأضلاع طول أحد ضلعيه المتجاورين ٣٠ متراً وطول الآخر ٢٥ متراً والزاوية  
المحصورة بينهما تساوي ٥٠° والمطلوب وضع رسم مقياسه سنتيمتر لكل ٥ أمتار ثم حساب الناتج لمساحة  
الشكل بواسطة قياس ارتفاعه كل على حدة وأخذ متوسط هذين الناتجين

٤ ا ب د ه شكل متوازي الأضلاع مساحته ٢٦,٦ من السنتيمترات المربعة وطول قاعدته  
ا ب يساوي ٧ سنتيمترات والمطلوب معرفة طول ارتفاعه

ارسم متوازي الأضلاع المذكور على فرض أن ا ب د ه = ٥ سنتيمترات

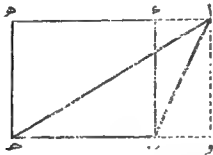
٥ معين مساحته ٢٤ سنتيمتراً مررها وطول أحد أضلاعه ٥ سنتيمترات ماهو ارتفاعه .

ارسم المعين المذكور وقس إحدى زاويتي الحادتين

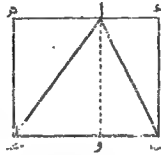


### نظرية ٢٥

مساحة المثلث - مساحة المثلث تساوي نصف مساحة المستطيل المتحد معه في القاعدة والارتفاع



(شكل ٢)



(شكل ١)

المثلث  $ABE$  متحد مع المستطيل  $ABCD$  في القاعدة  $AB$  والارتفاع  $AD$   
وتطلب البرهنة على أن  $\Delta ABE$  يكافئ نصف المستطيل  $ABCD$

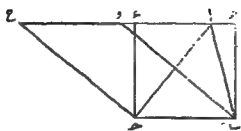
البرهان - من حيث أن  $AD$  عمود على  $AB$  فكل من الشكلين  $ABE$  و  $ABCD$  مستطيل  
ومن حيث أن القطر  $AC$  يقسم المستطيل  $ABCD$  الى قسمين متساويين

$$\therefore \Delta ABE = \text{نصف المستطيل } ABCD$$

$$\text{وكذلك } \Delta ABE = \text{نصف المستطيل } ABCD$$

وبالجمع في شكل ١ والطرح في شكل ٢ يحدث أن

$$\Delta ABE = \text{نصف المستطيل } ABCD \text{ وهو المطلوب}$$



نتيجة - المثلث نصف متوازي الأضلاع المتحد معه  
في القاعدة والمحصور معه بين متوازيين

$$\text{لأن المثلث } ABE = \text{نصف المستطيل } ABCD$$

$$\text{وهذا المستطيل } = \text{متوازي الأضلاع } ABCD$$

لأنهما متطابقان في القاعدة والارتفاع

$$\therefore \Delta ABE = \text{نصف متوازي الأضلاع } ABCD$$

## مساحة المثلث

إذا دل الرمز  $ق$  على طول الضلع  $ب$  والرمز  $ع$  على طول الارتفاع  $ا$  و (شكل ١ ٢٦)  
 بوحدة ما من وحدات الأطوال فإن مساحة المستطيل  $ب \times هـ = س$  و  $ق \times ع$  من مربعات هذه الوحدة  
 $\therefore$  مساحة المثلث  $ا ب = \frac{1}{2} ق \times ع$  من هذه الوحدات المربعة  
 أى أن مساحة المثلث  $= \frac{1}{2}$  القاعدة  $\times$  الارتفاع

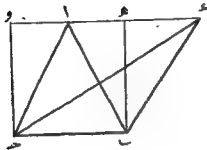
## تمارين على مساحة المثلث

(عددية وتخطيطية)

- ١ ماساحة المثلث في كل من الحالات الآتية :  
 (أولاً) القاعدة  $= ٢٤$  متراً والارتفاع  $= ١٥$  متراً  
 (ثانياً) القاعدة  $= ٤٨$  من السنتيمترات والارتفاع  $= ٣,٥$  من السنتيمترات  
 (ثالثاً) القاعدة  $= ١٦٠$  متراً والارتفاع  $= ١٢,٥$  متراً
- ٢ المطلوب رسم المثلث  $ا ب$  في كل من الحالات الآتية :  
 (أولاً) الضلع  $ا = ٨,٤$  من السنتيمترات  $ب = ٦,٨$  من السنتيمترات  $ج = ٤$  سنتيمترات  
 (ثانياً) الضلع  $ب = ٥$  سنتيمترات  $ج = ٦,٨$  من السنتيمترات  $ا = ١,٦$   
 (ثالثاً) الضلع  $ا = ٦,٥$  من السنتيمترات  $ب = ٥,٢$  سنتيمترات  $ج = ٦,٦$   
 ثم رسم ارتفاع كل مثلث بالنسبة إلى ضلع فيه يعتبر قاعدة وحساب مساحة المثلث بالتقريب بعد قياس الارتفاع
- ٣  $ا ب$  مثلث قائم الزاوية في  $ب$  والمطلوب بيان أن مساحة المثلث تساوى  $\frac{1}{2} ب \times ا$  وحساب هذه المساحة إذا كان  $ا = ٦$  سنتيمترات  $ب = ٥$  سنتيمترات  
 ارسم المثلث بهذه الأبعاد وقس الوتر  $ا ج$  ثم انزل عليه عموداً من  $ب$  وقسهِ وبذلك أوجد مساحة المثلث على وجه التقريب ثم بين مقدار الخطأ ونسبته في المائة إلى المساحة الحقيقية
- ٤ المطلوب إعادة إجراء ما في المسألة السابقة إذا كان  $ا = ٦,٦$  من السنتيمترات  $ب = ٩$  سنتيمترات مع العلم بأن الزاوية القائمة هي  $ب$
- ٥ ما طول ارتفاع مثلث مساحته  $٥٠٠$  سنتيمتر مربع وطول قاعدته  $٥٠$  سنتيمتراً وما طول القاعدة إذا كانت مساحة المثلث المذكور  $١٠,٤$  من السنتيمترات المربعة وارتفاعه  $١,٦$  من السنتيمترات
- ٦ ارسم المثلث  $ا ب$  الذي طول ضلعه  $ا = ٧,٥$  من السنتيمترات  $ب = ٧$  سنتيمترات  $ج = ٦,٥$  من السنتيمترات وانزل من  $ا$  عموداً على  $ب$  ثم قسهِ وبذلك أوجد مساحة المثلث بالتقريب

### نظرية ٢٦

المثلثات المتصلة في القاعدة ورؤوسها على مستقيم مواز لها متكافئة



الفرص —  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  مثلثان متصلان في القاعدة  $BC$  ورأساهما  $A$  و  $D$  على المستقيم  $AD$  الموازي  $BC$

والمطلوب إثبات أن  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  يكافئ  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

البرهان — إذا كان  $BC$  مستطيلاً متصلاً مع المثلثين  $ABC$  و  $DEF$  في القاعدة  $BC$  وعصورياً مهمما بين متوازيين

يكون  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  نصف المستطيل  $BC$  و  $AD$  (نظرية ٢٥)

وكذلك  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  نصف المستطيل  $BC$  و  $AD$

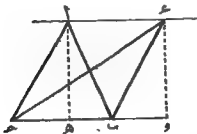
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$  يكافئ  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  وهو المطلوب

وعلى ذلك فالمثلثات ذوات القواعد المتساوية والارتفاعات المتساوية متكافئة

### نظرية ٢٧

المثلثات المتكافئة المتصلة في القاعدة والمرسومة في جهة واحدة منها تكون رؤوسها على مستقيم

يوازي تلك القاعدة



الفرص —  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  مثلثان متكافئان مرسومان على قاعدة واحدة  $BC$  وفي جهة واحدة منها  $A$  و  $D$  و ارتفاعاهما

والمطلوب إثبات أن  $AD \parallel BC$  متوازيان

البرهان —  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  يكافئ نصف المستطيل الذي يده  $BC$  و  $AD$

وكذلك  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  يكافئ نصف المستطيل الذي يده  $BC$  و  $AD$

$\therefore$  المستطيل الذي يده  $BC$  و  $AD$  = المستطيل الذي يده  $BC$  و  $AD$

$\therefore AD \parallel BC$  (نظرية ٢٣ نتيجة ٢)

ولكن  $AD \parallel BC$

$\therefore AD \parallel BC$  أي يوازي  $BC$  وهو المطلوب

## تمارين على مساحة المثلث

(مسائل نظرية)

١  $a \sim b$  مثلث والمستقيم  $س$   $ص$  يوازي القاعدة  $b \sim c$  ويقطع  $a$  في  $س$   $ا$   $ا$  في  $ص$ برهن على أنه اذا وصل  $b$   $ص$   $ا$   $ا$   $ص$  فقطاعا في  $د$  يحدث(أولا) أن  $ا$   $ا$   $ص$   $ب$   $د$  يكافئ  $ا$   $ا$   $ص$   $ب$   $د$ (ثانيا) أن  $ا$   $ا$   $ص$   $ب$   $د$  يكافئ  $ا$   $ا$   $ص$   $ب$   $د$   $ص$ (ثالثا) أن  $ا$   $ا$   $ص$   $ب$   $د$  يكافئ  $ا$   $ا$   $ص$   $ب$   $د$   $ص$ (رابعا) أن  $ا$   $ا$   $ص$   $ب$   $د$   $ص$  يكافئ  $ا$   $ا$   $ص$   $ب$   $د$   $ص$ 

٢ برهن على أن المستقيم المتوسط للثلث يقسمه الى مثلثين متكافئين وارسم مستقيمتين من رأس

المثلث تقسمه الى ثلاثة أجزاء متكافئة

٣ برهن على أن قطري متوازي الأضلاع يقسمانه الى أربعة مثلثات متكافئة

٤  $a \sim b$  مثلث والنقطة  $د$  منتصف قاعدة  $b \sim c$  برهن على أنه اذا فرضت نقطة  $ما$  مثل $د$  على المستقيم المتوسط  $ا$   $د$  ثم وصل منها الى  $ب$   $ا$   $ا$   $د$  كان  $ا$   $ا$   $د$  يكافئ  $ا$   $ا$   $د$ ٥  $a \sim b$   $د$  متوازي الأضلاع ازل من  $ب$   $ا$   $د$  العمودان  $ب$   $س$   $ا$   $د$   $ص$  على قطره  $ا$   $د$ برهن على أن  $ب$   $س$   $=$   $د$   $ص$  وعلى ذلك اذا فرضت نقطة مثل  $د$  على القطر  $ا$   $د$  أو على

امتداده قانبت

(أولا) أن  $ا$   $ا$   $د$   $ص$   $د$  يكافئ  $ا$   $ا$   $د$   $ص$   $د$  يكافئ  $ا$   $ا$   $د$   $ص$   $د$  (ثانيا)  $ا$   $ا$   $د$   $ص$   $د$  يكافئ  $ا$   $ا$   $د$   $ص$   $د$ 

٦ المطلوب اثبات أن المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث وذلك

بواسطة نظريتي ٢٦ ٦ ٢٧

٧ المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعي شبه المنحرف غير المتوازيين يوازي قاعدتيه المتوازيتين

٨  $a \sim b$   $د$  شكل متوازي الأضلاع والنقطة  $س$  منتصف  $ا$   $د$  والنقطة  $ص$  منتصف  $ب$   $د$ برهن على أنه اذا أخذت النقطة  $ع$  على  $ص$   $ص$  أو على امتداده ووصل منها الى  $ا$   $ا$   $د$  كان $ا$   $ا$   $د$   $ب$  ربع متوازي الأضلاع المذكور٩  $a \sim b$   $د$  شكل متوازي الأضلاع  $س$  نقطة  $ما$  على  $ا$   $ا$   $د$   $ص$  على  $د$   $ص$  برهن على أن $ا$   $ا$   $د$   $ب$   $ص$  يكافئ  $ا$   $ا$   $د$   $ب$   $ص$ ١٠  $a \sim b$   $د$  شكل متوازي الأضلاع  $ا$   $د$  نقطة مفروضة داخله برهن على أن مجموعمساحتي المثلثين  $ا$   $ا$   $د$   $ب$   $د$   $ص$  يساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع

## تمارين على مساحة المثلث

(عددية وتخطيطية)

١ مزرعة على شكل مثلث أضلاعه ٣٧٠ متراً ٢٠٠ متراً ١٩٠ متراً والمطلوب وضع رسم مقياسه سنتيمتر لكل ٥٠ متراً وحساب مساحة المزرعة بالتقريب وذلك بانزال أحد ارتفاعات المثلث وقياسه

٢ حوش على شكل مثلث طول ضلعين منه ١٣٤ متراً ١٤٤ متراً والزاوية المحصورة بينهما تساوي ٤٥° والمطلوب وضع رسم مقياسه سنتيمتر لكل ٢٠ متراً وحساب مساحة الحوش بالتقريب بعد قياس ما هو لازم لاستخراجها

٣ ا ب ح مثلث مساحته ٢٦ من السنتيمترات المربعة وطول قاعدته ب ح ٥ من السنتيمترات والمطلوب إيجاد ارتفاعه وتعيين المحل الهندسي للرأس ا ثم رسم المثلث مع العلم بأن  $a = 2,6$  من السنتيمترات وقياس ا ب

٤ ا ب ح مثلث مساحته ١٨,٩ من السنتيمترات المربعة والضلع ا'  $= 7$  سنتيمترات ما طول ارتفاعه أوجد المحل الهندسي للرأس ا وارسم المثلث مع العلم بأن  $d = 9,8$  ثم قس الضلع ب

٥ ا ب ح مثلث طول كل من ضلعيه ب ح ٦ ا ثابت وليكن الأول ٦ سنتيمترات والثاني ٥ سنتيمترات فإذا فرض أن الضلع ا يدور حول نقطة ب وأن ب ح ثابت لا يتحرك ما هي التغيرات في مساحة المثلثات الحادثة

لكن الاجابة على هذه المسألة برسم عدة مثلثات تزداد فيها ب ح على التوالي بقدر ٣٠ من الصفر الى ١٨٠° ثم إيجاد مساحة كل مثلث ووضع النتائج في صورة جدول

## (مسائل نظرية)

٦ اذا ساوى ضلعان من مثلث نظيريهما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول تكمل الزاوية المحصورة بين نظيريهما في الثاني كان المثلثان متكافئين هل يمكن أن ينطبق مثل هذين المثلثين كل على الآخر تماماً

٧ المطلوب رسم مثلث متساوي الساقين على قاعدة مثلث معلوم بحيث يكافئه

٨ اذا وصل بين منتصفات أضلاع الشكل الرباعي على الترتيب بمسقطات كان متوازي الأضلاع الحادث (راجع تمرين ٧ صفحة ٦٩) مكافئاً لنصف الشكل الرباعي المذكور

٩ ا ب ح مثلث ٦ منتصف ا ب ٦ منتصف ا ح برهن على أنه اذا تقاطع ب ح ٦ س ه في س فإن المثلث ب س ح يكافئ الشكل الرباعي ا س ه

١٠ اذا رسمنا مثلثين متكافئين على قاعدة واحدة كل في جهة فان هذه القاعدة أو امتدادها تنصف المستقيم الواصل بين رأسي المثلثين

[لأبأس بارجاء الطريقة الآتية في أول الأمر وعلى كل حال فلا يجوز إعطاؤها إلا بعد نظرية ٢٩]

مساحة المثلث — المطلوب حساب مساحة المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة

مثلا اذا كانت أضلاع المثلث تساوى ٢١ مترا ١٠٦ أمتار ١٧٦ مترا فانه يمكن إيجاد

مساحته بالطريقة الآتية

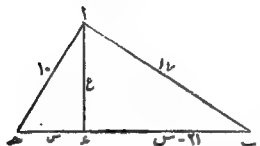
فرض أن  $a =$  المثلث المعطاة أضلاعه فلايجاد

مساحته

نزل العمود  $a$  على  $b$  ونرمز بالحرف  $c$  لطول

$a$  وبالحرف  $s$  لطول  $b$  فيحدث أن

$$s = 21 - s$$



$$\text{ومن نظرية ٢٩ نجد في المثلث } a \text{ القائم الزاوية أن } a^2 = 10^2 - s^2 = 17^2 - (21-s)^2$$

$$\text{وفي المثلث القائم الزاوية } a \text{ ب أن } a^2 = 17^2 - (21-s)^2$$

$$\therefore 10^2 - s^2 = 17^2 - (21-s)^2$$

$$\text{أى أن } 100 - s^2 = 289 - 441 + 42s - s^2$$

$$\text{ومنه ينتج أن } 6 = s$$

$$\text{ومن حيث أن } a^2 = 10^2 - s^2 = 17^2 - (21-s)^2$$

$$\text{أو } 6^2 = 10^2 - s^2 = 17^2 - (21-s)^2$$

$$\therefore 8 = c$$

ومن حيث أن مساحة المثلث =  $\frac{1}{2}$  القاعدة  $\times$  الارتفاع

$$\therefore \text{مساحة المثلث} = \left( 8 \times 21 \times \frac{1}{2} \right) = 84 \text{ مترا مربعا}$$

تمارين

المطلوب إيجاد مساحة المثلث بالطريقة المتقدمة اذا كانت أطوال أضلاعه كما يأتي

١	٢٠ ١٣٦ ١١٦ (من الأمتار)	٤	٣٠ ٢٥٦ ١١٦ (من السنتيمترات)
٢	١٥ ١٤٦ ١٣٦ (من الياردات)	٥	٣٧ ٣٠٦ ١٣٦ (من الديسيمترات)
٣	٢١ ٢٠٦ ١٣٦ (من الأمتار)	٦	٥١ ٣٧٦ ٢٠٦ (من الأمتار)

٧ اذا كانت الأضلاع ٦ ٦ ٦ تمثل على وحدات قما من وحدات الأطوال فاثبت

$$\text{(أولا) أن } s = \frac{r_1 - r_2 + r_3}{2}$$

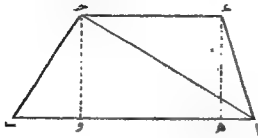
$$\text{(ثانيا) أن } c = \frac{r_1 - r_2 + r_3}{2} - r_2$$

$$\text{(ثالثا) أن } \Delta = \frac{1}{4} (r_1 + r_2 + r_3)(r_1 + r_2 - r_3)(r_1 - r_2 + r_3)(-r_1 + r_2 + r_3)$$

## مساحة الأشكال الرباعية

### نظرية ٢٨

المتطلب إيجاد مساحة (أولاً) شبه المنحرف (ثانياً) أى شكل رباعي



(أولاً) ا ب د ه شبه منحرف ضلعه المتوازيان  
هـ ا ب د هـ

نصل ا ه ونزل العمودين د ه و ه على ا ب  
فلو رمزنا للقاعدة ا ب بالحرف و وللقاعدة  
د ه بالحرف و

ولارتفاع د ه أو د ه بالحرف ع وكانت هذه الرموز دالة على عدد  
الوحدات الطولية التي يحتوى عليها كل من هذه الخطوط

لحدث أن مساحة ا ب د ه = د ه ا ب د ه + د ه ا ب د ه

$$= \frac{1}{2} \times د ه \times ا ب + \frac{1}{2} \times د ه \times د ه$$

$$= \frac{1}{2} \times و \times ع + \frac{1}{2} \times و \times ع$$

$$= \frac{1}{2} \times (و + و) \times ع$$

أى أن مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب نصف الارتفاع في مجموع قاعدتيه المتوازيتين

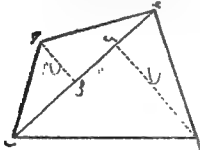
(ثانياً) نفرض أن ا ب د ه شكلاً رباعياً

ونصل أحد قطريه وليكن د ه ونزل عليه من ا ب

العمودين ا ص ب هـ

فإذا دلت الرموز د ه و ع على وحدات الطول التي يحتوى

عليها كل من د ه ا ب ب هـ ا ب د هـ



فإن مساحة الشكل الرباعي ا ب د ه = د ه ا ب د ه + د ه ا ب د ه

$$= \frac{1}{2} \times د ه \times ا ب + \frac{1}{2} \times د ه \times ا ب$$

$$= \frac{1}{2} \times و \times ع + \frac{1}{2} \times و \times ع$$

$$= \frac{1}{2} \times (و + و) \times ع$$

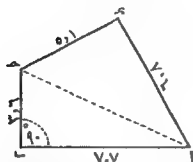
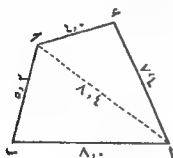
أى أن مساحة الشكل الرباعي تساوى نصف حاصل ضرب أحد قطريه في مجموع الارتفاعين

النازلين عليه من الراسين المقابلين له

## تمارين

( عددية وخطية )

- ١ المطلوب إيجاد مساحة شبه المنحرف الذى طول قاعدتيه المتوازيين  $٤,٧$  من السنتيمترات  
 ٢ مالمساحة الشكل الرباعى  $١٦ = ٢٠$  الذى طول قطره  $١٧$  سنتيمترا والعمود النازل  
 عليه من  $١١$  سنتيمترا والنازل عليه من  $٩$  يساوى سنتيمترات  
 ٣ حوش على صورة الشكل الرباعى  $١٦ = ٢٠$  رسم بمقياس سنتيمتر لكل  $٥$  امتار فكان فى الرسم  
 طول القطر  $٨,٢ = ١٠$  من السنتيمترات والعمود النازل عليه من  $٣,٤ = ٤$  من السنتيمترات  
 والنازل عله من  $٢,٦ = ٣$  من السنتيمترات والمطلوب إيجاد مساحة الحوش المذكور

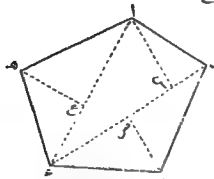


- ٦ المطلوب رسم شبه المنحرف  $abcd$  الذي قاعدته المتوازيتان  $a$  و  $b$  مع العلم بأن  $a = 10$  سنتيمترات  $b = 6$  سنتيمترات  $h = 5$  سنتيمترات  $ك = 1$  سنتيمترات  $د = 3$  سنتيمترات ثم إيجاد مساحته بعد قياس ما يلزم لإيجاده
- ٧ ارسم شبه المنحرف  $abcd$  الذي قاعدته المتوازيتان  $a$  و  $b$  مع العلم بأن  $a = 9$  سنتيمترات  $b = 6$  سنتيمترات  $ك = 3$  سنتيمترات  $د = 4$  سنتيمترات ثم أوجد مساحته بعد قياس ما يلزم لإيجاده
- ٨ معلوم أن مساحة الشكل الرباعي  $= \frac{1}{4}$  القطر  $\times$  مجموع العمودين النازلين عليه من الرأسين المقابلين له أثبت أنه إذا كان قطراه متعامدين كانت مساحته  $= \frac{1}{4}$  حاصل ضرب القطرين
- ٩ إذا كان طول كل من قطري الشكل الرباعي ثابتا ومقدار الزاوية المحصورة بينهما ثابتا أيضا فإن مساحته لا تتغير مهما تغيرت نقطة تقاطعهما



## مساحة الأشكال الكثيرة الأضلاع

لايجاد مساحة أى شكل كثير الأضلاع طريقان

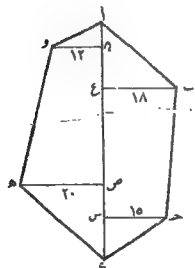


الأولى - تقسم الشكل الى جملة مثلثات وتوجد مساحة كل مثلث بعد قياس مايلزم لايجادها ثم نضم هذه المساحات بعضها الى بعض

فمثلا الشكل ا ب ج د هـ يمكن ايجاد مساحته اذا عرفنا طول كل من القطرين د ا و ب والاعمدة ا س و ٦ ح ص ٦ هـ ع النازلة عليهما

الثانية - تقسم الشكل الى مثلثات قائمة الزاوية وأشباه منحرفات قائمة الزاوية بانزال أعمدة من رؤوسه على أحد أقطاره (١ و ٢ في الشكل) المعتبر قاعدة للأشكال الحادة فلكون أجزاء القاعدة ومقادير الأعمدة النازلة عليها من رؤوس الشكل يمكن أن تقاس بفاية الدقة يتوصل بالطرق المتقدمة الى ايجاد مساحات الأجزاء المختلفة المتركب منها الشكل المذكور ثم نضم بعضها الى بعض والنتائج هو مقدار مساحة الشكل

فمثلا لايجاد مساحة الحوش ا ب ج د هـ و من الأقيسة التي في الجدول الآتي



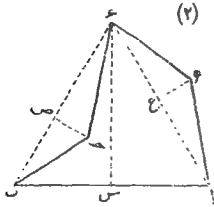
(فملاحظة أن أقيسة أجزاء القاعدة ١ و ٢ مأخوذة من ابتداء نقطة د الى موقع كل عمود نازل عليها من رؤوس الشكل)

أمتار	
٥٦ = ا	د هـ = ١٢
٥٠ = ب	١٨ = ج
٤٠ = د	٢٠ = هـ
١٨ = ص	٢٠ = هـ
١٠ = ص	١٥ = ح

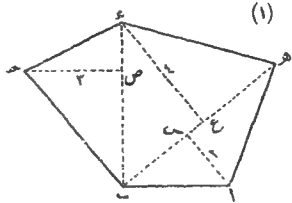
نجد أن ٥٦ = ا د هـ = ١٠ × ١٠ × ١/٢ = ٥٠ ص × د هـ = ١٠ × ١٢ = ١٢٠  
 ٥٠ = ب د هـ = ٢٠ × ١٨ × ١/٢ = ١٨٠ ص × د هـ = ٢٠ × ١٨ = ٣٦٠  
 ٤٠ = ج د هـ = ١٨ × ١٦ × ١/٢ = ١٤٤ ص × د هـ = ١٨ × ١٦ = ٢٨٨  
 ١٨ = د هـ = ١٢ × ٦ × ١/٢ = ٣٦ ص × د هـ = ١٢ × ٦ = ٧٢  
 ١٠ = ص د هـ = ١٠ × ١٠ × ١/٢ = ٥٠ ص × د هـ = ١٠ × ١٢ = ١٢٠  
 وشبه المنحرف من ح د هـ = ١/٢ (ص د هـ + د هـ) = ١/٢ (١٠ + ١٢) = ١١  
 وشبه المنحرف من هـ د و = ١/٢ (ص هـ + د و) = ١/٢ (٢٠ + ١٨) = ١٩  
 وبالمجموع يحدث أن مساحة الشكل ا ب ج د هـ و

## تمارين

١ المطلوب إيجاد مساحة كل من الشكلين (١) و (٢) إذا قيست أبعادهما بالستيمترات



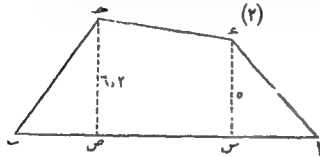
أ ب = د = ز = ٦ ستيمترات  
ح ص = ه ع = ١ ستيمترا  
د س = ٢ من الستيمترات



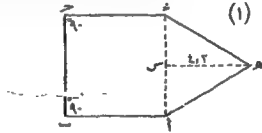
ب د = ٥ ستيمترات  
ب ه = ٦

ومقادير الأضلاع كما هي مية في الشكل

٢ ارسم شكلين كالآتيين بحيث تكون أبعادهما مقدرة بالأقسمة الحقيقية المبينة بعد وأوجد مساحتهما



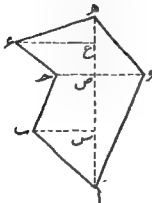
أ ص = ٦, ٢ من الستيمترات  
س ص = ٦, ٩  
ب ص = ٤, ١



هذا الشكل متساوي الأضلاع  
وطوله ضلعه ٥ ستيمترات  
وكذلك ه س مقدر بالستيمترات

٣ المطلوب إيجاد مساحة الشكل أ ب د ه و من المقادير الآتية ووضع رسم بقياس ستيمتر

لكل ٢٠ مترا



أمتار

٨٠ = د ع	١٨٠ = ه ا	ص د = ٥٠
٤٠ = ح ص	١٥٠ = ع ا	
٦٠ = ب ص	١٢٠ = ا ص	
	٥٠ = ا ص	

## تمارين على الأشكال الرباعية

(مسائل نظرية)

١ ا ب ح د مستطيل نصفنا كلا من أضلاعه في النقط هـ و ز عـ و ح ط ثم وصلنا بينها على الترتيب بمستقييات برهن على

(أولاً) أن الشكل هـ و ع ط معين

(ثانياً) أن مساحة هـ و ع ط نصف مساحة ا ب ح د

ومن ذلك برهن على أن مساحة المعين  $= \frac{1}{2}$  حاصل ضرب قطريه وبين ما إذا كانت هذه القاعدة تسرى على كل شكل رباعي قطراه متعامدان مع إيضاح ذلك بالرسم

٢ برهن على أن أى مستقيم ماز ب نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع يقسمه الى جزأين متكافئتين ومن هذا بين كيف تقسم متوازي الأضلاع ا ب ح د الى جزأين متكافئتين

(أولاً) بمستقيم يترب نقطة مفروضة

(ثانياً) بمستقيم عمودى على الضلع ا ب

(ثالثاً) بمستقيم يوازي آخر معلوما

٣ ا ب ح د شبه منحرف قاعدته المتوازيتان هما ا ب و ح د برهن على أنه اذا نصف ا د في م ورسم مستقيم ماز بهذه النقطة وموازي ب و وقاطع ا ب في ن وامتداد ح د في ع يثبت

(أولاً) أن شبه المنحرف ا ب ح د يكافئ متوازي الأضلاع م ن ح د ع

(ثانياً) أن شبه المنحرف ا ب ح د يكافئ ضعف ا ب م ن

(مسائل تخطيطية)

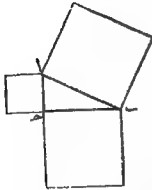
٤ ا ب ح د شكل رباعي قطراه متعامدان وطول أحدهما ٧ من السنتيمترات والآخر ٥ من السنتيمترات والمطلوب إيجاد مساحته بين الرسم أن هذه المساحة لا تتغير أينما تقاطع القطران ما دامتا متعامدين

٥ ارسم متوازي الأضلاع ا ب ح د الذى فيه ا ب = ٨ سنتيمترات و ح د = ٣,٢ من السنتيمترات والارتفاع المحصور بين ا ب و ح د يساوى ٣ سنتيمترات واستخرج طول الارتفاع المحصور بين ب و ح د وحقق الناتج بقياس هذا البعد

٦ ارسم شكلاً متوازي الأضلاع أحد أضلاعه = ٦,٣ من السنتيمترات وأحد قطريه = ٨,٥ من السنتيمترات والآخر = ٦ سنتيمترات ثم أوجد مساحته بعد قياس ما يلزم لإيجادها

٧ ا ب ح د شكل متوازي الأضلاع طول قاعدته ا ب ثابت ومساحته ثابتة والمطلوب إيجاد المحل الهندسى لنقطة تقاطع قطريه

## تمارين تمهيدية لنظرية ٢٩



الفرض من المسائل الآتية مقارنة المربع المنشأ على وتر المثلث  $أ ب ح$  القائم الزاوية في  $ح$  يجمع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كما هو مبين في الشكل

١ اذا رسم الشكل المذكور على فرض أن  $أ = ٣$  مستقيمتان

$ب = ٤$  مستقيمتان

حدث أن مساحة المربع المنشأ على  $أ = ٩$  أو مستقيمتان مربعة

ومساحة المربع المنشأ على  $ب = ١٦$  أو مستقيمتان مربعة

∴ مجموع المربعين المنشأين على  $أ ب ح = ٢٥$  مستقيمتان مربعة

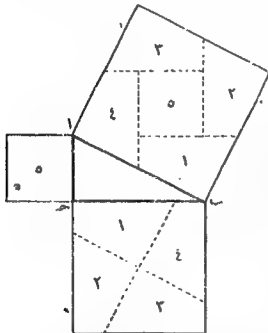
اذا نقرر هذا قس  $أ ب$  واستخرج مساحة المربع المنشأ عليه ثم قارن هذه المساحة بمجموع المساحتين المتقدمتين

٢ المطلوب عمل التمرين السابق اذا كان  $أ = ٢$  من المستقيمتان  $ب = ٦$  مستقيمتان

٣ اذا كان الضلع  $أ = ١٥$   $ب = ٨$   $ح = ١٧$  بين بالحساب أن  $أ^٢ + ب^٢ = ح^٢$

وارسم على ورق المربعات المثلث  $أ ب ح$  الذي طول ضلعه  $أ = ١٥$   $ب = ٨$   $ح = ١٧$

من وحدات طولية ثم قس  $أ ب$



٤ قارن بين مساحة المربع المنشأ على الوتر  $أ ب$  ومجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين بالطريقة الآتية وهي

أن ترسم في المربع المنشأ على  $أ ب$  مستقيمتين أحدهما يوازي الوتر  $أ ب$  والآخر عمودي عليه من نقطة ملتي قطري المربع فيقسم المربع بهذين المستقيمتين الى أربعة أقسام ينطبق كل منها على الآخر تماماً

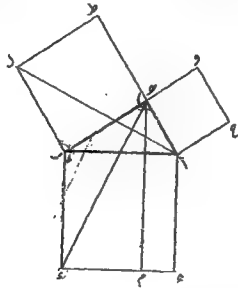
فاذا أضيف الى هذه الأقسام المربع المنشأ على الضلع  $أ ب$  كوتت أجزاء المربع المنشأ على الوتر  $أ ب$  كما هو مبين في الشكل بالأرقام

ومن هذا يرى أن المربع المنشأ على وتر القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين

وبلى هذه التمارين البرهان النظري لهذه النظرية

### نظرية ٢٩

المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين



ليكن  $AB \perp AC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$

ويطلب البرهنة على أن المربع المنشأ على الوتر  $AB =$  مجموع المربعين المنشأين على الضلعين  $AC$  و  $BC$

لذلك نفرض المربع  $ABDE$  على  $AB$  والمربع  $ACFG$  على  $AC$  والمربع  $ACHI$  على  $AC$

ثم نرسم من  $A$  المستقيم  $AD$  يوازي  $BC$  و  $AC$

ونصل  $AD$  و  $AC$

البرهان — من حيث أن كلا من الزاويتين  $ACH$  و  $ACD$  قائمة

∴ المستقيم  $AD$  يكون على امتداد المستقيم  $AC$

ومن حيث أن  $AD = AC$  و  $AC = AD$  بالقياس

∴ بإضافة  $AD$  إلى كل منهما

يحدث أن الزاوية الكلية  $ACH =$  الزاوية الكلية  $ACD$

وفي المثلثين  $ACH$  و  $ACD$

$$AC = AD$$

$$AD = AC$$

$$\left. \begin{array}{l} AC = AD \\ AD = AC \end{array} \right\} \text{من حيث أن}$$

$$\text{والزاوية المحصورة } ACH = \text{الزاوية المحصورة } ACD$$

∴  $\Delta \text{ ح ب د} = \Delta \text{ ل ب ا}$  (نظرية ٤)

لكن المستطيل ب م يكافئ ضعف  $\Delta \text{ ح ب د}$  لأنه متضمنه في القاعدة ب د ومحصور معه بين المتوازيين ب د و ح د

والمربع ب ط يكافئ ضعف  $\Delta \text{ ل ب ا}$  لأنه متحد معه في القاعدة ب ل ومحصور معه بين المتوازيين ب ل و ح ل

∴ المستطيل ب م يكافئ المربع ب ط

وكذا اذا وصلنا ه د ب ح يحدث أن

المستطيل م ا يكافئ المربع ا د

∴ المربع الكلي ب ه د = مجموع المربعين ب ط و ا د

أى أن المربع المنشأ على الوتر ا ب = مجموع المربعين المنشأين على الضلعين ب د و ح د وهو المطلوب ملاحظة - تعرف هذه النظرية بنظرية فيثاغورس وخلاصتها فيما يأتى

$$\overline{ا ب}^2 = \overline{ب د}^2 + \overline{ح د}^2$$

وبعبارة أخرى اذا دل الرمز ا ب على طولى الضلعين المحصورة بينهما الزاوية القائمة ح د على الوتر

$$\overline{ا ب}^2 = \overline{ب د}^2 + \overline{ح د}^2 \quad \text{كان}$$

$$\overline{ا ب}^2 - \overline{ب د}^2 = \overline{ح د}^2 \quad \text{ومنه يتبع أن}$$

تنبيه ١ - يؤخذ مما تقدم أنه اذا فرض أن م نقطة تقاطع ب د مع ا ب

فإن المربع ب ط يكافئ المستطيل ب م

أى أن  $\overline{ب د}^2$  يكافئ المستطيل ب م  $\times$  ب م ... .. (١)

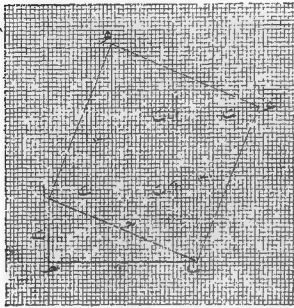
وكذلك المربع ا د يكافئ للمستطيل ا م

أى أن  $\overline{ا د}^2$  يكافئ المستطيل ا م  $\times$  ا م ... .. (٢)

تنبيه ٢ - من حيث انه يمكن البرهنة على أن المربعين المنشأين على ضلعين متساويين يتكافآن بذلك بواسطة اضلعا قهما كل على الآخر فانه يمكن الاستدلال على أن اضلاع المربعات المتكافئة متساوية



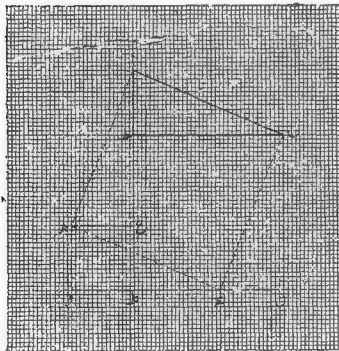
طريقة عملية للبرهنة على نظرية فيثاغورس



(أولاً) نفرض أن  $ab$  = المثلث القائم  
الزاوية المعلوم وأن  $ab$  =  $cd$  المربع المنشأ  
على الوتر  $ab$  فإذا رسم من رؤوس المربع  
المذكور مستقيمت موازية للضلعين  $b$  و  
 $c$  =  $a$  حدث في الشكل أربعة مثلثات  
قائمة الزاوية كل منها ينطبق تمام الانطباق  
على المثلث المفروض  $ab$  =

فإذا رمزنا بالحروف  $a$   $b$   $c$   $d$   $e$   
لأضلاع المثلث كما تقدم يحدث أن المربع  
المنشأ على الوتر  $c$  =  $e$  مثلثات قائمة  
الزاوية + المربع المتوسط المبين في الشكل أي أن

$$\begin{aligned} (b - c) + c \times a \times \frac{1}{c} \times e &= b^2 \\ c + c \times b - c + c \times a \times 2 &= \\ b + c &= \end{aligned}$$



(ثانياً) نفرض أن  $ab$  = المثلث  
القائم الزاوية المعلوم وأن  $cd$  = المربع  
المنشأ على  $b$  فإذا أخذ البعد  
 $cd$  =  $e$  =  $a$  ورسم المربع  
 $e$  و بجانب المربع  $cd$  ثم وصل  
 $b$  و  $c$  =  $a$  نرى أن

$cd$  و  $e$  يمكن تطبيقهما تماماً على  
 $cd$  =  $e$  =  $a$  و  $cd$  =  $e$  =  $a$  ينطبق  
على  $cd$  =  $e$  =  $a$  وذلك نراه بقطع  
المثلثات وتطبيقها بعضها على بعض  
وأن المربع  $e$  = المربع  
المنشأ على  $a$

وأن  $ab$  =  $cd$  = المربع المنشأ على  $ab$  وكل هذا تسهل البرهنة عليه  
فإذا تأملنا نرى أن  $ab$  =  $cd$  =  $e$  الذي هو المربع المنشأ على الوتر يساوي مجموع المربعين  $cd$  و  $e$  و  
المنشأين على الضلعين الآخرين

## تمارين

(عددية وتخطيطية)

- ١ المطلوب رسم المثلث  $abc$  القائم الزاوية في  $c$  مع العلم  
(أولاً) بأن  $a = 3$  سنتيمترات  $b = 4$  سنتيمترات  
(ثانياً)  $a = 1$  من السنتيمترات  $b = 6$  سنتيمترات  
(ثالثاً)  $a = 1$   $b = 3,1$  » »  $b = 6$  من السنتيمترات

أوجد مقدار طول الوتر في كل حالة وحقق ذلك بالقياس

- ٢ المطلوب رسم المثلث  $abc$  القائم الزاوية في  $c$  مع العلم  
(أولاً) بأن  $a = 8,5$  من السنتيمترات  $b = 7,5$  من السنتيمترات (راجع عملية ١٠)  
(ثانياً)  $a = 5,3$  » »  $b = 4,5$  » »

أوجد مقدار الضلع الثالث للثلث في كل حالة مع تحقيق ذلك بالقياس

(المطلوب حل المسائل الآتية واستخراج المقادير المطلوبة بالحساب مع وضع الرسم اللازم وتحقيق المقادير الناتجة بالقياس)

٣ ما طول سلم طرفه الأعلى على شباك يبعد عن الأرض ٤٠ متراً وطرفه الأسفل يبعد عن السطح ٩ أمتار

٤ سارت سفينة من نقطة معينة متجهة نحو الجنوب ٣٣ كيلومتراً ثم انجذبت نحو الغرب ٥٦ كيلومتراً فما مقدار بعدها عن النقطة الأولى

٥ سفينتان أحدهما في الجهة الشمالية الشرقية من نقطة معلومة والأخرى في الجهة الشمالية الغربية منها وتبعد الأولى عن هذه النقطة ٦ كيلومترات والثانية ١٠١ من الكيلومترات ما طول المسافة بين السفينتين

٦ سلم طوله ٦٥ قدماً مرتكز على حائط ونقطة ارتكاز طرفه الأعلى تبعد عن الأرض ٦٣ قدماً ما طول المسافة بين الحائط وطرفه الأسفل

٧ إذا فرضت النقطة  $b$  شرق  $a$  ونقطة  $c$  جنوبي  $b$  على مسافة ٥٥ متراً منها وكان  $a = 73$  متراً فما طول  $ab$



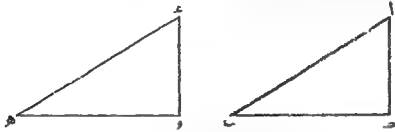
٨ سار رجل ٢٧ كيلومترا متجها نحو الجنوب ثم اتجه غربا وسار ٢٤ كيلومترا ثم شمالا وسار ٢٠ كيلومترا مابعدة عن نقطة مسيره الأولى

٩ سار رجل من نقطة متجها نحو الغرب مسافة ٣٥ مترا ثم اتجه شمالا وسار ٦٠ مترا ثم شرقا وسار ٨٠ مترا ثم جنوبا وسار ١٢ مترا مابعدة عن نقطة مسيره الأولى

١٠ سلم طوله ١٠ أمتار متركز على شباك يسعد عن الأرض ٩,٦ من الأمتار ولو مال حتى ارتكز على حائط في الجهة الأخرى من الشارع بدون أن تتغير نقطة ارتكازه على الأرض لبعدت نقطة ارتكازه على هذا الحائط عن الأرض ٢,٨ من الأمتار ماعرض الشارع

نظرية ٣٠

إذا كان المربع المنشأ على أحد أضلاع مثلث يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كانت الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين قائمة



فرض أن  $ا ب$  مثلث وأن

المربع المنشأ على  $ا ب =$  مجموع المربعين المنشأين على  $ا د$  و  $ب د$

ويطلب إثبات أن  $ا ب$  قائمة

لذلك نرمس المستقيم  $ه و = ب د$

ونقسم على  $ه و$  من النقطة  $و$  العمود  $د و = ا د$

ثم نصل  $ه د$

البرهان - من حيث أن  $ه و = ب د$

$\therefore$  المربع المنشأ على  $ه و =$  المربع المنشأ على  $ب د$

ومن حيث أن  $د و = ا د$

$\therefore$  المربع المنشأ على  $د و =$  المربع المنشأ على  $ا د$

ومنه يتضح أن مجموع المربعين المنشأين على  $ه و$  و  $د و =$  مجموع المربعين المنشأين على  $ا د$  و  $ب د$

ومن حيث أن  $د ه و د$  قائمة

$\therefore$  مجموع المربعين المنشأين على  $ه و$  و  $د و =$  المربع المنشأ على  $د ه$  (نظرية ٢٩)

ولكن مجموع المربعين المنشأين على  $ا د$  و  $ب د =$  المربع المنشأ على  $ا ب$  بالفرض

$\therefore$  المربع المنشأ على  $د ه =$  المربع المنشأ على  $ا ب$

$\therefore$   $د ه = ا ب$

وفي المثلثين  $ا ب د$  و  $د ه و$

$ا د = د ه$

$ب د = د ه$

$ا ب = د ه$

$\therefore$   $ا ب د = د ه و$

(نظرية ٧)

لكن  $ا ب د = د ه و$  قائمة

$\therefore$   $ا ب د$  قائمة وهو المطلوب

## تمارين على نظرية ٢٩ و ٣٠

(مسائل نظرية)

- ١ برهن على أن المربع المنشأ على قطر المربع يساوي ضعف هذا المربع
- ٢  $AB = AC$  مثلث  $ABC$  من  $A$  العمود  $AD$  على القاعدة  $BC$  فإذا كان الضلع  $AC$  أكبر من الضلع  $AB$  كان  $\angle C > \angle B$   $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{BC}{CD}$
- ٣ إذا فرضت نقطة  $M$  داخل المثلث  $ABC$  وانزل منها على أضلاعها الأعمدة  $M$  من على  $BC$   $AM = 6$   $BM = 1$   $CM = 6$  على  $AB$  حدث أن
- $AE + \frac{AC}{AB} + \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AM} + \frac{BC}{BM} + \frac{BC}{CM}$
- ٤  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  رسمنا مستقيما من  $M$  قاطعا  $AB$  في  $N$   $AC$  في  $P$  ثم وصلنا  $M$  من  $K$   $BC$  برهن على أن
- $\frac{AM}{BK} + \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC} + \frac{AC}{BC}$
- ٥ في المثلث القائم الزاوية  $E$  أمثال مجموع مربعي المستقيمين المتوسطين المرسومين من زاويتي الحادتين تساوي  $E$  أمثال مربع الوتر
- ٦ ارسم مربعا يساوي مجموع مربعين معلومين
- ٧ ارسم مربعا يساوي الفرق بين مربعين معلومين
- ٨ المطلوب تقسيم مستقيم الى قسمين بحيث يكون مربع أحدهما ضعف مربع الآخر
- ٩ المطلوب تقسيم مستقيم الى قسمين بحيث يكون مجموع مربعيهما مساويا مربعا معلوما

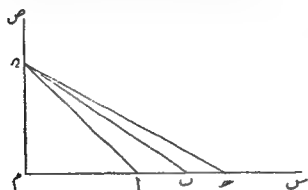
(عددية وتخطيطية)

- ١٠ أى المثلثات الآتية قائم الزاوية
- (١)  $14 = AC$   $6 = BC$   $48 = AB$  سنتيمترا  $6 = AC$   $50 = AB$  سنتيمترا
- (٢)  $40 = AC$   $6 = BC$   $10 = AB$  سنتيمترات  $6 = AC$   $41 = AB$  سنتيمترا
- (٣)  $20 = AC$   $6 = BC$   $99 = AB$  سنتيمترا  $6 = AC$   $101 = AB$  سنتيمترا
- ١١  $ABC$  مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في  $C$  والمطلوب استخراج النتيجة الآتية من نظرية ٢٩ وهي
- $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$

- وايضاح هذا الناتج بواسطة توصيل قطري المربع المنشأ على  $AB$  وأحد قطري المربع المنشأ على  $AC$  وإذا كان  $AC = 6$   $BC = 5$  سنتيمترات فما طول  $AB$  الى أقرب مليمترا . جقق الناتج بوضع رسم وقياس  $AB$
- ١٢ ارسم مربعا طول قطره  $6$  سنتيمترات واحسب طول ضلعه مع تحقيق ذلك بالقياس ثم اوجد المساحة

## عملية ١٦

المطلوب رسم المربع الذى مساحته ضعف مساحة مربع معلوم أو ثلاثة أمثاله أو أربعة أمثاله وهكذا  
ثم إيجاد المقادير التقريبية لكل من  $\sqrt{2}$   $\sqrt{3}$   $\sqrt{4}$   $\sqrt{5}$   $\sqrt{6}$   $\sqrt{7}$   $\sqrt{8}$   $\sqrt{9}$   $\sqrt{10}$  بطريقتى تخطيطية



لذلك نرمس المستقيمين المتعامدين م م  
م م م ونأخذ على م م من البعد م م  
يساوى وحدة تامن وحدات الأطوال وعلى  
م م من البعد م م يساوى هذه الوحدة  
ونصل م م

$$٢ = ١ + ١ = \sqrt{١}^2 + \sqrt{١}^2 = \sqrt{٢}^2 \quad \text{فيكون}$$

$$\sqrt{٢} = ١.٤١$$

ولايجاد المقدار

نأخذ على م م من البعد م م = ١ م ونصل م م

$$٣ = ٢ + ١ = \sqrt{٢}^2 + \sqrt{١}^2 = \sqrt{٣}^2 \quad \text{فيحصل أن}$$

$$\sqrt{٣} = ١.٧٣$$

ولايجاد المقدار

نأخذ على م م من البعد م م = ٢ م ونصل م م

$$٤ = ٣ + ١ = \sqrt{٣}^2 + \sqrt{١}^2 = \sqrt{٤}^2 \quad \text{فيحصل أن}$$

$$\sqrt{٤} = ٢.٠٠$$

وبقياس كل من الأبعاد م م م م م م م م بقاية البقعة نصل إلى معرفة المقادير  $\sqrt{٢}$   $\sqrt{٣}$   $\sqrt{٤}$

$\sqrt{٥}$   $\sqrt{٦}$   $\sqrt{٧}$   $\sqrt{٨}$   $\sqrt{٩}$   $\sqrt{١٠}$  وبالسيرة العمل على هذا النمط نوجد كلا من المقادير  $\sqrt{١١}$   $\sqrt{١٢}$   $\sqrt{١٣}$   $\sqrt{١٤}$   $\sqrt{١٥}$  وهكذا

(تابع التارين على نظريتى ٢٩ ٣٠ ٣١)

١٣ برهن على القانون

$$\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = \text{قطر المربع} = \text{ضلعه}$$

ثم أوجد لأقرب ستيتمتر طول قطر المربع الذى طول ضلعه ٥٠ مترا

وضع شكلا لذلك مقياس الرسم فيه ستيتمتر واحد لكل ١٠ أمتار واستخرج الناتج المتقدم بواسطة  
قياس القطر

١٤ ا ب ح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٢ (من وحدات ما) وطول العمود النازل من أحد الرؤوس على القاعدة يساوي ع برهن على أن

$$\sqrt{3} \times 2 = 2$$

وحقق هذا الناتج برسم المثلث اذا كان طول ضلعه ٨ سنتيمترات

$$١٥ ا ب ح مثلث فيه الضلع أ = ٢م - ٢د ب = ٢م + ٢د = ٢م + ٢م = ٤م$$

$$\text{برهن بالجبر على أن } ٢د + ٢ب = ٢م$$

وانا أطلق لكل من ٢د ٢م مقادير عددية مختلفة فانه يطلب إيجاد المقدار الدال على طول كل من أضلاع المثلث القائم الزاوية في كل حالة

١٦ ا ب ح مثلث أنزلنا من ا العمود ا د على القاعدة ب ح فاذا رمزنا لطول هذا العمود بالحرف ع وكان

(أولاً) أ = ٢٥ سنتيمترا ٢د = ١٢ سنتيمترا ٢ب = ٩ سنتيمترات فانه يطلب إيجاد طول كل من الضلعين ب ح

(ثانياً) ب = ٤١ ديسيمترا ٢د = ٥٠ ديسيمترا ٢ب = ٣٠ ديسيمترا فانه يطلب إيجاد طول كل من العمود ع والضلع أ وإثبات أن

$$١ = \sqrt{٢٥ - ٢د} + \sqrt{٢٥ - ٢د}$$

١٧ ا ب ح مثلث ٢د عمود على ب ح ويراد إثبات أن

$$\frac{٢د}{٢ب} = \frac{٢د}{٢ب}$$

وانذا كان أ = ٥١ سنتيمترا ٢د = ٢٠ سنتيمترا ٢ب = ٣٧ سنتيمترا فما طول كل من ب ح وما مساحة المثلث ا ب ح

١٨ استعمل طريقة المسألة المتقدمة في إيجاد مساحات المثلثات التي أطوال أضلاع كل منها كما يأتي

(أولاً) أ = ١٧ سنتيمترا ٢د = ١٠ سنتيمترات ٢ب = ٩ سنتيمترات

(ثانياً) أ = ٢٥ مترا ٢د = ١٧ مترا ٢ب = ١٢ مترا

(ثالثاً) أ = ٤١ سنتيمترا ٢د = ٢٨ سنتيمترا ٢ب = ١٥ سنتيمترا

(رابعاً) أ = ٤٠ ياردة ٢د = ٣٧ ياردة ٢ب = ١٣ ياردة

١٩ المسطرات ٢ م ٦ م متعامدتان تترقى عليهما مسطرة ثالثة  $ab$  فإذا كان في أحد أوضاعها  $a = ٥,٦$  م من السنتيمترات  $٦ م ٢ = ٣,٣$  م من السنتيمترات وفي وضع آخر  $a = ٤$  سنتيمترات فأوجد طول  $٢ م$  بقياسه بعد وضع رسم لذلك واستخرج هذا الطول أيضا بالحساب

٢٠  $a = ١$  م مثلث قائم الزاوية في  $c$   $٦ م$   $c$  طول العمود النازل من  $c$  على  $ab$  برهن على أنه باستخراج مساحة المثلث بطريقتين يحدث أن

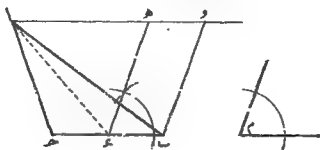
$$c \times 1 = ١ \times ٦$$

$$\frac{1}{١} + \frac{1}{٦} = \frac{1}{c} \quad \text{ومن ذلك استنتج أن}$$

## دعوى عملية على المساحات

### عملية ١٧

المطلوب رسم متوازي الأضلاع الذى يكافئ مثلثا معلوما بحيث تكون احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة



فرض أن  $AB \Delta$  المثلث المعلوم  $\angle C$  الزاوية المعلومة

والمطلوب رسم متوازي الأضلاع الذى يكافئ  $AB \Delta$  بحيث تكون احدى زواياه تساوى  $\angle C$

العمل - ننصف  $AB$  فى  $D$  ونمد منها المستقيم  $DE$  يصنع مع  $BC$  زاوية  $\angle E = \angle C$

ونرسم من  $A$  المستقيم  $AD$  و يوازي  $DE$

ومن  $B$  المستقيم  $BE$  و يوازي  $AD$

فيكون  $ABED$  و متوازي الأضلاع المطلوب

البرهان - نصل  $AE$

من حيث ان  $AD \parallel BE$  متحدران فى الارضاع ومرسومان على القاعدتين المتساويتين

$\angle DAE = \angle E$

$\therefore AD \parallel BE$  يكافئ  $AD \parallel BE$

$\therefore ABED$  ضعف  $AD \parallel BE$

ومن حيث ان  $AD \parallel BE$  و متوازي الأضلاع بالعمل ويساوى ضعف  $AD \parallel BE$  لأنهما متحدران

فى القاعدة  $AB$  ومحصوران بين المتوازيين  $AD \parallel BE$  و  $AE$

$\therefore$  متوازي الأضلاع  $ABED$  و يكافئ ضعف  $AD \parallel BE$  أى يكافئ  $AB \Delta$

ومن حيث ان احدى زوايا متوازي الأضلاع المذكور هى  $\angle E = \angle C$  الزاوية المعلومة  $\angle C$

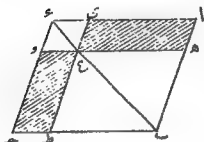
متوازي الأضلاع المطلوب رسمه هو  $ABED$

## تمہارے

(تخطيطية)

١ ارسم مربعا طول ضلعه ٥ مستقيمات وارسم على ضلعه متوازي الأضلاع الذي يكافئه واحد  
زواياه تساوي ٤٠° واوجد طول أحد ضلعي المثلثين بالحساب وبالقياس

٢ ارسم متوازي الأضلاع  $a_1 b_1 c_1 d_1$  الذي طول ضاعه  $a_1 = 6$  سم،  $b_1 = 8$  سم، وتقيمتات  $c_1 d_1 = 5$  سم،  $d_1 e_1 = 7$  سم.



٣ في شكل التعرف المتقن برهن بنظرية ٢١ على أن المتممين هـ ٦ ط و متكافئان وإذا فرض أن ط و شكل متوازي الأضلاع معلوم وأن حـ ٥ مستقيم فانه يطلب رسم شكل متوازي الأضلاع على حـ ٥ يكافئ متوازي الأضلاع المعلوم وتكون زواياه مساوية لزوايا هذا المعلوم

٤ المطلوب رسم مستطيل يكافئ آخر معلوما مثل  $s, h$  و على شرط أن يكون أحد أضلاعه مساويا لطول معلوما  $a$

وإذا كان  $a = 6$  سنتيمترات  $b = 8$  سنتيمترات  $c = 3$  سنتيمترات فإنه يطلب إيجاد طول الضلع الثاني المستطيل بالقياس

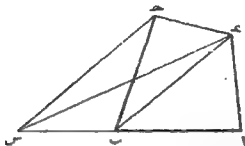
٥ ا ب ح د متوازي الأضلاع الذي طول ضلعه ا ب = ٦ سنتيمترات ٦ ا ب ح د متوازي الأضلاع الذي طول ضلعه ا ب = ٦ سنتيمترات ٧ ا ب ح د متوازي الأضلاع الذي طول ضلعه ا ب = ٦ سنتيمترات ٨ ا ب ح د متوازي الأضلاع الذي طول ضلعه ا ب = ٦ سنتيمترات ٩ ا ب ح د متوازي الأضلاع الذي طول ضلعه ا ب = ٦ سنتيمترات ١٠ ا ب ح د متوازي الأضلاع الذي طول ضلعه ا ب = ٦ سنتيمترات

٦ المطلوب رسم مستطيل على ضلع طوله ٥ سنتيمترات يكافئ مثلثا متساوي الأضلاع طول ضلعه ٦ سنتيمترات ثم ايجاد طول الضلع الثاني للمستطيل بالقياس ومساحته على وجه التقريب بالحساب



# عملية ١٨

المطلوب رسم مثلث يكافئ شكلا رابعيا معلوما



نفرض أن  $ABCD$  الشكل الرابعي المعلوم

والمطلوب رسم مثلث يكافئ هذا الشكل

العمل - فصل  $BC$

ونرسم من  $C$  المستقيم  $CF$  يوازي  $BC$  ويقابل امتداد  $AB$  في  $F$

فصل  $CF$

فيكون  $CF$  هو المثلث المطلوب

البرهان - من حيث أن المثلثين  $BCF$  و  $ABC$  على قاعدة واحدة وهي  $BC$  وبين المتوازيين

$BC$  و  $CF$

$$\therefore \triangle BCF = \triangle ABC$$

وبإضافة  $AC$  إلى كل من طرفي هذه المتساوية يحدث أن  $ACF = ACB$  = الشكل  $ABCD$

نتيجة - يؤخذ مما تقدم أنه يمكن تحويل أي شكل

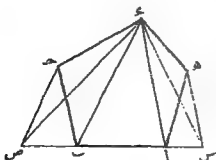
كثير الأضلاع إلى آخر يكافئه يكون عدد رؤوسه أقل بواحد

من عدد رؤوس الأول وبهذه الوساطة يمكن تحويل أي

شكل كثير الأضلاع إلى مثلث يكافئه

فتلا الشكل الخماسي  $ABCDE$  يكافئ الشكل الرابعي

$BCD$



والشكل الرابعي  $BCD$  يمكن تحويله إلى المثلث  $BCG$  من المكافئ له



### تسارين على تحويل كثير الأضلاع الى مثلث مكافئ له

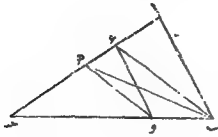
- ١ ارسم شكلا رباعيا مثل  $ا ب د ه$  فيه  $ا ب = ب د = د ه = ه ا$  من الستيمترات  $٥٠$  ثم حول الشكل الى مثلث يكافئه وقس قاعدته وارتفاعه ثم أوجد مساحة الشكل الرباعي بالتقريب  $٦ د = د ه = ه ا = ا ب = ١٠٨$  من الستيمترات  $٩٥$
- ٢ ارسم شكلا رباعيا مثل  $ا ب د ه$  فيه  $ا ب = ب د = د ه = ه ا$  من الستيمترات  $٦٠$   $٦ د = د ه = ه ا = ا ب = ١٢٠$  من الستيمترات والقطر  $٦٠$  من الستيمترات ثم حول الشكل الى مثلث يكافئه وأوجد من ذلك المساحة التقريبية للشكل  $٦ د = د ه = ه ا = ا ب = ١٢٠$  من الستيمترات
- ٣ ارسم خمسا متساوي الأضلاع على شرط أن يكون طول قاعدته  $ا ب = ٤$  مستقيمات وكل من زاويتييه  $ا ب د$  تساوي  $١٠٨$  ثم حول الخمس المذكور الى مثلث يكافئه وقس قاعدته وارتفاعه ومن ذلك أوجد المساحة التقريبية للخمس
- ٤  $ا ب د ه$  مزروعة على هيئة شكل رباعي طول ضلعه  $ا ب = ٤٥٠$  مترا  $٦ د = د ه = ه ا = ا ب = ٣٨٠$  مترا  $٦ د = د ه = ه ا = ا ب = ٣٩٠$  مترا وقطره  $ا ب = ٦٦٠$  مترا والمطلوب رسم الشكل المذكور (بمقياس سنتيمتر لكل ٥٠ مترا) ثم تحويله الى مثلث يكافئه وإيجاد مساحته بعد قياس قاعدة المثلث وارتفاعه

### (مسائل عملية)

#### (اذ كر حل كل مسألة مع البرهان)

- ٥  $ا ب د ه$  مثلث  $ا ب د$  مثلث  $ا ب د$  نقطة مفروضة على قاعدته  $د$  أو على امتدادها والمطلوب رسم مثلث يكافئ المثلث  $ا ب د$  على شرط أن تكون قاعدته  $د ه$
- ٦ ارسم مثلثا ذا ارتفاع معلوم يكافئ مثلثا آخر
- ٧  $ا ب د ه$  مثلث  $ا ب د$  مثلث  $ا ب د$  من نقطة ما والمطلوب رسم مثلث يكافئ المثلث  $ا ب د$  على شرط أن تكون من رأسه  $ا$  وأن تكون قاعدته على استقامة  $د ه$
- ٨  $ا ب د ه$  مثلث  $ا ب د$  مثلث  $ا ب د$  من نقطة ما مفروضة على  $د ه$  والمطلوب تحويل الشكل الى مثلث يكافئه على شرط أن تكون من رأسه  $ا$  وأن تكون قاعدته على استقامة  $ا ب$
- ٩ بين كيفية تقسيم المثلث الى أجزاء متكافئة عليها  $د ه$  بعد مستقيمتين من احد رؤوسه

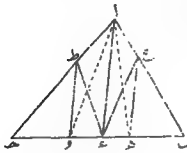
١٠ نصف مثلثا معلوما بمستقيم يمر بنقطة مفروضة على أحد أضلاعه



[لذلك نفرض أن  $ا ب ح$  المثلث المعلوم  $ك$  النقطة المفروضة على أحد الأضلاع وليكن  $ا ح$  فننصف هذا الضلع في نقطة  $هـ$  ونصل  $ب ك$   $ب هـ$  ونرسم من  $هـ$  المستقيم  $هـ د$  يوازي  $ب ك$  ونصل  $د و$  فيكون هذا المستقيم هو المنصف المطلوب]

١١ المطلوب تقسيم مثلث معلوم الى ثلاثة أجزاء متكافئة بمستقيمين يمران بنقطة مفروضة على أحد أضلاعه

[لذلك نفرض أن  $ا ب ح$  المثلث المعلوم  $ك$  النقطة المفروضة على أحد الأضلاع وليكن  $ح$



فنقسم  $ب ح$  الى ثلاثة أقسام متساوية بالنقطتين  $هـ ك$  و (عملية  $٧$ )  
ثم نصل  $ا ك$  ونرسم  $هـ ع$   $ك و$  يوازيان  $ا ك$  ونصل  
 $د ع$   $ك و$

فيقسم  $د ع$   $ك و$  المثلث الى ثلاثة أقسام متكافئة  
وللبرهنة على ذلك نصل  $ا هـ$   $ا و$  ]

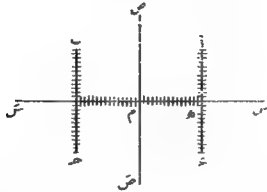
١٢ المعلوم مثلث ونقطة مفروضة على أحد أضلاعه والمطلوب رسم مستقيم من هذه النقطة يقطع من المثلث جزءا يكافئ ربعه أو خمسة أوسدسه أو أى كسر آخر منه

١٣ المعلوم شكل رباعي والمطلوب رسم مستقيم ينصف الشكل المذكور ويمر بأحد رؤوسه (لذلك نحول الشكل الرباعي الى مثلث يكافئه ثم ننصف قاعدة المثلث ونصل رأسه بنصف القاعدة فينصف هذا المستقيم الشكل الرباعي المعلوم)

١٤ المعلوم شكل رباعي والمطلوب إيجاد ربعه أو خمسة أوسدسه أو أى كسر آخر منه برسم مستقيم من أحد رؤوسه

### المحوران الاحداثيان والبعدان الاحداثيان

يتعين وضع أى نقطة بالنسبة الى مستقيمين متقاطعين أحدهما عمودى على الآخر متى علم بعدنا هذه النقطة عن هذين المستقيمين  
 فإذا تقاطع مستقيمان  $ص$   $ص'$   $ك$   $ك'$  في  $م$  وكاذا متعامدين وعلم بعد النقطة  $ا$  مثلا عن  $ص$   $ص'$  وبعدها عن  $ك$   $ك'$  يتعين وضع هذه النقطة بالنسبة الى  $ص$   $ص'$   $ك$   $ك'$



ويسمى كل من المستقيمين  $ص$   $ص'$   $ك$   $ك'$  بمحور الاحداث ونقطة تقاطعهما  $م$  بنقطة الأصل  
 ويعرف المحور  $ص$   $ص'$  بمحور السينات والمحور  $ك$   $ك'$  بمحور الصادات  
 ويرسم عادة محاور السينات أفقيا ومحاور الصادات رأسيا  
 فإذا فرضت نقطة مثل  $ا$  وأريد تعيين بعدها عن  $ص$   $ص'$   $ك$   $ك'$  من  $ا$  نزل منها العمود  $هـ$  على  $ص$  وطول هذا العمود يدل على بعد النقطة  $ا$  عن المحور  $ص$  وطول  $م$   $هـ$  يدل على بعدها عن المحور  $ص$   $ص'$

ويرمز لبعدها أى نقطة مثل  $ا$  عن محاور الصادات بالرمز  $ص$

ويرمز لبعدها عن محاور السينات بالرمز  $ص'$

وقال لهنين البعدين معا البعدان الاحداثيان للنقطة ويرمز لها هكذا ( $ص$   $ص'$ )

فتلا اذا أريد تعيين وضع نقطة بعدها الاحداثيان ( $١٥$   $١٢$ ) نجري العمل هكذا

نركز في  $م$  وتأخذ على  $ص$  البعد  $م$   $هـ = ١٥$  وحده

ونقيم من  $هـ$  عمودا على  $ص$  وتأخذ عليه البعد  $هـ$   $ا = ١٢$  وحده

فتكون  $ا$  هي النقطة التي بعدها الاحداثيان ( $١٥$   $١٢$ )

والمحوران الاحداثيان يقسمان مستوى الرسم الى أربعة أقسام هي  $ص$   $ص'$   $ك$   $ك'$  من  $ص$   $ص'$   $ك$   $ك'$  من  $ص$   $ص'$   $ك$   $ك'$  من  $ص$   $ص'$   $ك$   $ك'$  من  $ص$   $ص'$   $ك$   $ك'$  وتعرف هذه الأقسام على ترتيبها المذكور بالربع الأول والثاني والثالث والرابع

ومن حيث انه يمكن أن توجد في كل ربع من الأرباع المذكورة نقطة بعدها الاحداثيان مساويان للبعدين الاحداثيين للنقطة  $ا$  أى  $١٥$  وحده  $١٢$  وحده يلزم لمعرفة ما اذا كانت النقطة المراد تعيينها

واقعة في الربع الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع استعمال الاشارات الجبرية الموجبة والسالبة على النسق الآتي

تعتبر الأبعاد المأخوذة على محور السينات من يمين نقطة الأصل موجبة  
وتعتبر الأبعاد المأخوذة على هذا المحور من يسار نقطة الأصل سالبة وتسبق بعلامة -  
وتعتبر الأبعاد المأخوذة على محور الصادات موجبة ان كانت فوق محور السينات بأن كانت في الربعين الأول أو الثاني

وسالبة وتسبق بعلامة - ان كانت تحت هذا المحور بأن كانت في الربعين الثالث أو الرابع  
وعلى ذلك فالبعادات الاحداثيان للنقطة ب هما ( - ١٥ ١٢ )  
» » » » ( - ١٥ ١٢ )  
» » » » ( - ١٥ ١٢ )  
ملاحظة - البعدان الاحداثيان لنقطة الأصل م هما ( ٠ ٠ )

وللمسولة في الأعمال التطبيقية يستعمل الورق المنقسم الى مربعات صغيرة فيرسم محوران متعامدان متقاطعان في نقطة تعتبر أنها الأصل ويؤخذ طول كل قسم أو أكثر وحدة للطول والورق المستعمل في الأمثلة الآتية منقسم الى مربعات طول ضلع كل منها مليمتر وللتطبيق على ما تقدم نضرب الأمثلة الآتية  
المثال الأول - البعدان الاحداثيان للنقطة ١ هما ( ٢١ ٢٤ ) وللنقطة ب هما ( - ١٥ ٩٦ )  
المطلوب تعيين هاتين النقطتين وإيجاد البعد بينهما

لذلك طريقتان

الأولى - يعين موضع كل من النقطتين المذكورتين كما هو واضح من الشكل ثم يقاس البعد ١  
والثانية - يعين وضع النقطتين كما تقدم

ثم يرسم من ب مستقيم يوازي س س' ويمتد حتى يقابل العمود النازل من ١' على محور السينات في ح

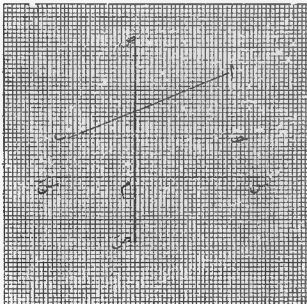
فيحدث أن ١٥ = ح ١٦ ٣٩ = ح وفيه ب ١٥ = ح

ومن حيث أن ٢١ = ح ٢١ + ح = ح ٢١ + ٣٩ = ح ١٥ + ٣٩ = ح

٢٢٥ + ١٢٩٦ =

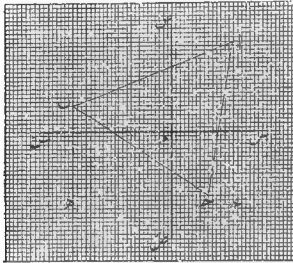
١٥٢١ =

٣٩ = ح ١



المثال الثاني — البعدان الاحداثيان لكل من النقط  $أ$   $ب$   $٦$   $٥$  هما  $(٢١٦١٥)$   $٦$   $(٦٦٢٤)$   $٦$   $(٩ - ١٥)$  والمطلوب تعيين هذه النقط الثلاث وإيجاد مساحة المثلث الحادث من توصيلها لذلك طريقتان أيضا

الأولى — انه بعد تعيين كل من النقط المذكورة كما هو واضح من الشكل تقيس  $أ$   $ب$  وتنزل عليه



من  $ح$  ارتفاع المثلث وتقيسه ثم نستخرج من ذلك مساحة المثلث التقريبية

والثانية — أن نرمم من  $أ$   $ب$  المستقيمين  $أ$   $س$   $ب$   $هـ$  يوازيان  $ص$   $ص$

ثم نرمم المستقيم  $د هـ$  ماثا بنقطة  $ح$  وموازي  $س$   $س$

فيحدث أن  $أ$   $ب$   $د هـ$   $س هـ$  = شبه المنحرف  $أ$   $د هـ$   $ب$  مطروحا منه المثلثان القائم الزاوية ( $أ$   $د هـ$   $ب$   $ح$ )

$$\text{أي أن } د هـ (أ + ب) - \frac{1}{4} أ د \times س هـ - \frac{1}{4} ب د \times هـ = \frac{1}{4} س هـ (أ + ب) - \frac{1}{4} أ د \times س هـ - \frac{1}{4} ب د \times هـ$$

$$= \frac{1}{4} ٥٧ \times ٣٩ - \frac{1}{4} ٦ \times ٣٦ - \frac{1}{4} ٢١ \times ٢٤ =$$

$$= ٦٥٧ \text{ وحدة مربعة}$$

## تمارين على ورق المربعات

١ عين كلا من النقط المبينة احداثياتها في المجاميع الآتية

أولاً (١٢ ١٨) و(١٢ ٦١٨) و(١٢ ٦١٨) و(١٢ ٦١٨) و(١٢ ٦١٨)

ثانياً (٢٤ ٠) و(٢٤ ٠) و(٢٤ ٠) و(٢٤ ٠) و(٢٤ ٠)

ثالثاً (٣٦ ١٥) و(٣٦ ١٥) و(٣٦ ١٥) و(٣٦ ١٥) و(٣٦ ١٥)

٢ عين النقط التي احداثياتها كالاتي وبين بطريقة عملية أن النقط في كل مجموعة على استقامة واحدة ثم برهن على ذلك نظرياً

أولاً (٢١ ٢٧) و(٢١ ٢٧) و(٢١ ٢٧) و(٢١ ٢٧) و(٢١ ٢٧)

ثانياً (٢١ ٢٧) و(٢١ ٢٧) و(٢١ ٢٧) و(٢١ ٢٧) و(٢١ ٢٧)

٣ عين تقطعي كل مجموعة من المجموعتين الآتيتين

أولاً (٢١ ٦٣٩) و(٢١ ٦٣٩) و(٢١ ٦٣٩) و(٢١ ٦٣٩) و(٢١ ٦٣٩)

ثانياً (٢١ ٦٣٩) و(٢١ ٦٣٩) و(٢١ ٦٣٩) و(٢١ ٦٣٩) و(٢١ ٦٣٩)

ثم صل بين تقطعي كل مجموعة بمستقيم وقس البعدين الاحداثيين لنقطة منتصفه وبين السبب في أن البعد الأفقي لنقطة التنصيف المذكورة يساوي نصف مجموع البعدين الاقيين للنقطتين الواصل بينهما المستقيم الذي نصف وأن البعد الرأسي لهذه النقطة يساوي نصف مجموع البعدين الرأسيين للنقطتين المذكورتين

٤ عين تقطعي كل مجموعة وصل بينهما بمستقيم وأوجد البعدين الاحداثيين لنقطة منتصفه

أولاً (٣٠ ٦٢٤) و(٣٠ ٦٢٤) و(٣٠ ٦٢٤) و(٣٠ ٦٢٤) و(٣٠ ٦٢٤)

ثانياً (٣٠ ٦٢٤) و(٣٠ ٦٢٤) و(٣٠ ٦٢٤) و(٣٠ ٦٢٤) و(٣٠ ٦٢٤)

٥ المطلوب تقسيم المستقيم الواصل بين (٠ ٦٠) و(٤٥ ٥٤) الى ثلاثة أقسام متساوية وإيجاد البعدين الاحداثيين لكل من نقط التقسيم المذكور

٦ عين النقط المبينة احداثياتها في المجموعتين الآتيتين

أولاً (١٢ ١٥) و(١٢ ١٥) و(١٢ ١٥) و(١٢ ١٥) و(١٢ ١٥)

ثانياً (٢٤ ١٨) و(٢٤ ١٨) و(٢٤ ١٨) و(٢٤ ١٨) و(٢٤ ١٨)

وبين أن نقط المجموعة الأولى توجد على مستقيم يوازي محور الصادات وأن نقط المجموعة الثانية على مستقيم يوازي محور السينات ثم أوجد بعدي الاحداث لنقطة تقاطع هذين المستقيمين



٧ عين كلا من النقط الآتية واستخرج بالحساب بعد كل منها عن نقطة الأصل ثم حققه بالقياس

أولا ( ٢٤ ٦٤٥ )	ثالثا <sup>سبعة</sup> ( ٢,١ ٦ ٧,٢ )
ثانيا ( ٢٤-٦٤٥ )	رابعا ( ٧,٢ ٢,١- )

٨ عين تقطى كل مجموعة من المجاميع الآتية واستخرج بالحساب البعد بينهما ثم حققه بالقياس

أولا ( ٠ ٦١٢ ) و ( ٩ ٦٠ )	رابعا ( ١٢ ٦ ٣٠ ) و ( ٣٦ ٦ ١٥ )
ثانيا ( ٢٤ ٦ ٢٧ ) و ( ١٥ ٦ ١٥ )	خامسا ( ٣٦ ٦ ٠ ) و ( ٠ ٦ ٤٥ )
ثالثا ( ٠ ٦ ٤٥ ) و ( ٢٤ ٦ ٠ )	سادسا ( ٢٧ ٦ ٠ ) و ( ٠ ٦ ٤٥ )

٩ عين أن النقط ( ٦ ٦ ٩- ) و ( ٣٠ ٦ ٩ ) و ( ٦ ٦ ٢١ ) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين

ثم استخرج بالحساب طول كل من ساقيه وحقق النتائج بالقياس

١٠ عين النقط الثمانية الآتية ( ١٥ ٦ ٠ ) و ( ١٢ ٦ ٩ ) و ( ٠ ٦ ١٥ ) و ( ٩ ٦ ١٢ ) و ( ٠ ٦ ١٥ ) و ( ١٥-٦٠ ) و ( ٩ ٦ ١٢- ) و ( ١٥-٦٠ ) ثم عين أنها واقعة على محيط دائرة مركزه نقطة الأصل

١١ عين بالرسم سبب تساوي البعد بين كل قطعتين في كل من المجاميع الآتية

أولا ( ٠ ٦ ١ ) و ( ٠ ٦ ٠ )
ثانيا ( ٠ ٦ ٠ ) و ( ١ ٦ ٠ )
ثالثا ( ٠ ٦ ٠ ) و ( ١ ٦ ١ )

١٢ ارسم المستقيمين الواصلين بين

أولا ( ٠ ٦ ١ ) و ( ١ ٦ ٠ )
ثانيا ( ٠ ٦ ٠ ) و ( ١ ٦ ١ )

واثبت أن هذين المستقيمين متعامدان وأن كلا منهما ينصف الآخر

١٣ عين أن النقط ( ١٢ ٦ ٠ ) و ( ٢٧ ٦ ٣٦ ) و ( ١٢-٦ ٣٦ ) هي رؤوس مثلث متساوي

الساقين وأن محور السينات ينصف قاعدة هذا المثلث

١٤ النقط ( ٠ ٦ ٤٢ ) و ( ٣٠ ٦ ٤٢ ) و ( ٣٠ ٦ ٠ ) هي رؤوس ثلاثة لمستطيل والمطلوب تعيين

رأسه الرابع وإيجاد البعدين الاحداثيين لنقطة تقاطع قطريه

١٥ برهن على أن النقط الأربع (٠.٦٠) و (٠.٦٣٩) و (٠.٦٥٤) و (٠.٦١٥) هي رؤوس معين وأوجد طول ضلعه والبعدين الاحداثيين لنقطة تقاطع قطريه

١٦ عين المحل الهندسى لنقطة تتحرك على شرط أن يكون بعدها عن النقطتين (٠.٦٠) و (٠.٦١٢-١٢) دائماً متساوين ثم عين تقاطع المحل الهندسى المذكور بالمحورين الاحداثيين

١٧ بين أن النقط الأربع في كل من المجاميع الآتية هي رؤوس مستطيل ارسمه واستخرج مساحته بالحساب

- أولاً (٠.٦١٢) و (٠.٦٥١) و (٠.٦٥١) و (٠.٦١٢)  
 ثانياً (٠.٦٦٩) و (٠.٦٥٦) و (٠.٦١٨-٤٥) و (٠.٦١٨-٦)  
 ثالثاً (٠.٦١٥) و (٠.٦٢٤-٣) و (٠.٦٢٤-٢٤) و (٠.٦١٥-٢٤)

١٨ صل على الترتيب بين النقط (٠.٦٣) و (٠.٦٠) و (٠.٦٣-٣) و (٠.٦٠-٣) وبين نوع الشكل الرباعي الحادث مع تعيين مساحته ومساحة الشكل الحادث من وصل منتصفات أضلاعه على الترتيب

١٩ ارسم المثلثات التي رؤوسها النقط الآتية ثم أوجد مساحة كل منها

- أولاً (٠.٦٣٠) و (٠.٦١٢) و (٠.٦٥٤)  
 ثانياً (٠.٦٣٠-٣) و (٠.٦١٢) و (٠.٦٥٤)  
 ثالثاً (٠.٦٣٠-٣) و (٠.٦١٢-٣) و (٠.٦٥٤-٣)  
 رابعاً (٠.٦٣٠-٣) و (٠.٦١٢-٣) و (٠.٦٥٤-٣)

٢٠ ارسم المثلثين اللذين رؤوسهما النقط الآتية ثم أوجد مساحتهما وقس درج زوايا المثلث الأول

- أولاً (٠.٦٠) و (٠.٦١٥) و (٠.٦١٨)  
 ثانياً (٠.٦٠) و (٠.٦٠٩) و (٠.٦١٨)

٢١ ارسم المثلثات التي رؤوسها النقط الآتية ثم بين أن في كل مثلث ضلعا يوازي أحد المحورين وبذلك أوجد مساحة كل منها

- أولاً (٠.٦٠) و (٠.٦٣٦) و (٠.٦٣٦-١٨)  
 ثانياً (٠.٦٠) و (٠.٦١٥) و (٠.٦٤٥-٢٤)  
 ثالثاً (٠.٦٠) و (٠.٦٣٦-٣٦) و (٠.٦٣٦-٢٤)  
 رابعاً (٠.٦٠) و (٠.٦١٨-٢٤) و (٠.٦٦٠-٢٤)



٢٩ ارسم شكلا رؤوسه على الترتيب (٦٠ - ٩) و (٩٦٢٤) و (٢٤٦١٢) و (٩٦١٢) و (٦٠ - ٩) ثم قسمه الى ثلاثة مثلثات قائمة الزوايا ومن ذلك استخرج مساحته مع إيجاد أطوال أضلاعه

٣٠ مزرعة على هيئة مثلث مثل  $abc$  رسم على ورق المربعات (بمقياس ٣ سنتيمترات لكل ١٠٠ متر) فوجد في الرسم المذكور أن البعدين الاحداثيين لكل من النقط  $a$   $b$   $c$  هما على الترتيب (٩ - ٦٣) و (٩٦٩) و (١٥٦ - ٦) من السنتيمترات مامساحة المزرعة وما طول ضلعها الدال عليه  $b$  في الرسم وما مقدار البعد بين هذا الضلع ورأس المزرعة المقابل له

٣١ بين أن النقط (١٨٠٦) و (١٨٦٠) و (٦٠٦٤٣) و (٤٢٦٠) هي رؤوس مربع قس ضلعه واستخرج من ذلك مساحته التقريبية ثم احسب المساحة بالضبط .

وذلك (أولا) برسم مربع آخر أضلاعه تمر برؤوس المربع الأول المعلوم

(وثانيا) بتقسيم المربع المعلوم بالكيفية التي انقسم بها المربع في الشكل الأول الذي في صفحة ١٢٩

(مسائل متنوعة)

١ إذا كان  $ا ب ح$  مثلثا ضلعا  $ا ب ٦$   $ا ح ٦$  غير متساويين وكان  $ا م$  المستقيم المتوسط الممدود من  $ا ٦ ٦$   $م ب$  منتصف الزاوية  $ب ا ح$   $ا ٦$   $ا م$  العمود النازل من  $ا$  على  $ب ح$  لزم أن يقع  $ا م$  بين  $ا$  و  $٦$  وأن ينحصر مقداره بينهما

٢ إذا أنزلنا من إحدى نهايتي قاعدة مثلث عمودا على منتصف زاوية الرأس فأن هذا العمود أولا يصنع مع أى ضلع من الضلعين المحيطين بالزاوية زاوية تساوى نصف مجموع زاويتي القاعدة وثانيا يصنع مع القاعدة زاوية تساوى نصف الفرق بين هاتين الزاويتين

٣ فى أى مثلث الزاوية المحصورة بين منتصف زاوية الرأس والعمود النازل من هذا الرأس على القاعدة تساوى نصف الفرق بين زاويتي القاعدة

٤ ارسم مثلثا قائم الزاوية علم منه الوتر والفرق بين ضلعي القائمة

٥ ارسم مثلثا علمت قاعدته وفرق زاويتيها وفرق الضلعين الآخرين أو مجموعهما

٦ ارسم مثلثا متساوى الساقين علمت قاعدته ومجموع أحد الساقين مع الارتفاع النازل من الرأس على القاعدة

٧ المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى جزأين على شرط أن يكون المربع المنشأ على أحدهما مكافئا لمثل المربع المنشأ على الجزء الآخر

٨  $ا ب ح$   $د$  متوازى الأضلاع  $٦ ٦$  نقطة خارجة عن الزاوية  $ب ا د$  أو عن التي تقابلها بالرأس والمطلوب البرهنة على أن المثلث  $ا م د$  يكافئ مجموع المثلثين  $ا م ٦$   $ا ٦ ٦$

وإذا وقعت  $م$  بين ضلعي الزاوية  $ب ا د$  أو بين ضلعي التي تقابلها بالرأس كان المثلث  $ا م د$  مكافئا للفرق بين المثلثين  $ا م ٦$   $ا ٦ ٦$

٩ إذا مساوى ضلعان من مثلث قطرى شكل رباعى وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعي المثلث مساوية لاحدى الزاويتين المحصورتين بين القطرين كان المثلث مكافئا للشكل الرباعى

١٠ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لنقطة تقاطع المستقيمتين المتوسطتين للثلثات المتكافئة المرسومة على قاعدة معلومة

١١ المطلوب رسم مثلث على قاعدة مثلث آخر معلوم على شرط أن يكافئه وأن يكون رأسه على مستقيم معلوم

١٢  $ا ب ح د$  شكل متوازى الأضلاع مكوثة أضلاعه من قضبان مرتبطة بعضها ببعض ارتباطا مفصليا فإذا كان الضلع  $ا ب$  ثابتا لا يتحرك فما هو المحل الهندسى لمنتصف  $د ح$



## الجزء الثالث

---





## الجزء الثالث

### الدائرة

#### تعاريف ومبادئ أولية

١ الدائرة هي شكل مستو محاط بخط حادث من حركة نقطة على بعد واحد دائماً من نقطة أخرى ثابتة تسمى المركز والخط الذي يحيط بالشكل يسمى محيط الدائرة

تنبیه — الدائرة على هذا التعريف هي السطح الذي يحدده المحيط وكثيراً ما يطلق لفظ الدائرة ويراد به المحيط وذلك عند أمن اللبس

٢ نصف قطر الدائرة مستقيم خارج من المركز ومتمه بالمحيط وينتج من هذا أن جميع أنصاف الاقطار لدائرة واحدة متساوية

٣ قطر الدائرة مستقيم ماز بالمركز وطرفاه على المحيط

٤ نصف الدائرة هو شكل محدود بقطر الدائرة وجزء المحيط المنتهى بطرفي هذا القطر ومبدأتي البرهان في صفحة ١٥٧ على أن القطر يقسم الدائرة الى قسمين ينطبق أحدهما على الآخر تمام الانطباق

٥ اذا اشتريت عدة دوائر في مركز واحد سميت متحدة المركز

وينتج من هذه التعاريف

(أولاً) ان الدائرة محاطة بخط منحني مقفل فاذا قطع مستقيم محيطها في نقطة ما فانه يقطعه في نقطة أخرى اذا مد على امتداعته

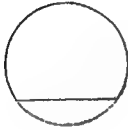
(ثانياً) بعد أى نقطة عن مركز الدائرة أكبر من نصف القطر أو أصغر منه على حسب كون النقطة خارج الدائرة أو داخلها

(ثالثاً) تكون النقطة خارج الدائرة أو داخلها على حسب كون بعدها عن المركز أكبر من نصف القطر أو أصغر منه

(رابعاً) تنطبق الدائرتان كل على الأخرى تمام الانطباق اذا تساوى نصفاهما قطريهما لأنه اذا وقع مركز احدهما على مركز الأخرى فان جميع نقط المحيط الأول تقع على جميع نقط المحيط الثاني

(خامساً) الدوائر التي تختلف أنصاف أقطارها في الطول لا يمكن أن تتقاطع اذا اتصلت في المركز لأن بعد كل نقطة على محيط الدائرة الصغرى عن المركز أصغر من بعد كل نقطة على محيط الدائرة الكبرى عن هذا المركز

(سادسا) اذا اشترك محيطا دائرتين في نقطة لا يمكن أن تتحدا في المركز إلا اذا انطبق محيطاهما كل على الآخر تماما



- ٦ قوس الدائرة جزء من محيطها  
٧ وتر الدائرة مستقيم واصل بين أى نقطتين على المحيط  
تثبيته — ينتج من هذه التعاريف أنه اذا لم يمر وتر الدائرة بمركزها فإنه يقسم المحيط الى قوسين غير متساويين أحدهما أكبر من نصف المحيط والآخر أصغر منه ويطلق على الأول القوس الأكبر والثاني القوس الأصغر والاثنتين معا القوسان المتراققان

### المثائل في الدائرة

سهل البرهنة على بعض الخواص الأولية للدائرة باعتبار خواص المثلثات ولذلك نورد هنا التعريف المتقدم  
كره في صفحة ٢٣

تعريف ١ — يقال ان في الشكل تماثلا بالنسبة الى خط معلوم فيه متى أمكن طى الشكل بحيث ينطبق جزاءه اللذان يفصلهما ذلك الخط كل على الآخر  
ويسمى المستقيم الذى يقسم الشكل الى جزأين متماثلين محور التماثل  
ومن الواضح أن هذا الانطباق لا يتأتى إلا اذا اتحد الجزأان المتقابلان مساحة وشكلا وتماثلا في وضعهما بالنسبة الى محور التماثل

تعريف ٢ — اذا فرض أن  $ab$  مستقيم وأن  $c$  نقطة خارجة عنه

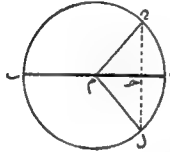


وانزل من  $c$  العمود  $ce$  على  $ab$  ثم مد على استقامته وأخذ على امتداده البعد  $cl = ce$   
ثم طوى الشكل بحيث ينطبق جزاءه كل على الآخر عند  $l$  فان النقطة  $c$  تقع على النقطة  $l$   
لأن  $cl = ce$  و  $cl = ce$  و  $cl = ce$   
وقال للنقطتين  $c$  و  $l$  انهما متماثلتا الوضع بالنسبة الى المحور وأن كلا منهما صورة للآخرى أو مائلة لها بالنسبة الى المحور

تثبيته — النقطة ومائلتها على بعدين متساويين عن أى نقطة على المحور (راجع عملية ١٤ صفحة ٩٦)

## بعض خواص التماثل في الدوائر

١ قطر الدائرة يقسمها الى جزأين متماثلين -



إذا فرضنا أن  $AB$  قطر لدائرة مركزها  $M$

فانه يطلب اثبات أن هذا القطر يقسمها الى جزأين متماثلين

البرهان - نمد من  $M$  نصفي القطرين  $MC$  و  $MD$  كل في جهة من  $AB$  بحيث تكون الزاويتان  $AMC$  و  $AMD$  متساويتين

فاذا طبقنا جزء الدائرة  $ACB$  على الجزء  $ADB$  حول  $AB$  فان  $M$  ينطبق على  $M$  لأن  $AMC = AMD$  علما وتقع النقطة  $C$  على القطة  $D$  لأن  $MC = MD$

وبهذه الطريقة يمكن إثبات أن أى قطة من نقط القوس  $ACB$  تقع على أخرى من القوس  $ADB$  وبذلك ينطبق جزئيا المحيط كل على الآخر

∴ قطر الدائرة يقسمها الى جزأين متماثلين

نتيجة - إذا فرضنا أن  $CD$  يقطع  $AB$  في  $H$  فمن حيث انه عند تطبيق جزأى الدائرة المتماثلين تقع قطة  $C$  على  $D$  ينتج أن  $H$  ينطبق على  $H$   
∴  $CH = HD$

$$6 \quad CH = HD = CM = MD$$

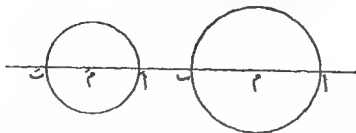
ومن حيث انهما مجاورتان فكل منهما قائمة

∴  $CH$  متانلتا الوضع بالنسبة الى  $AB$

وعلى ذلك يمكن أن يقال بالعكس اذا مر محيط دائرة بنقطة ما فانه لابد أن يمر بالتانلتا بالنسبة الى قطر ما

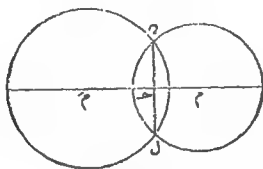
تعريف - المستقيم الواصل بين مركزي دائرتين يسمى خط المركزين

## ٢ خط المراكزين يقسم الدائرتين الى جزأين متماثلين



نفرض أن  $م م$  مركزا دائرتين وأن المستقيم المار بالنقطتين  $م م$  يقطع المحيطين الأول في  $ا ب$  والثاني في  $ا ب$  فيكون  $ا ب$  قطرين فهما إذن محورا التماثل كل في دائرته أى أن خط المراكزين يقسم كلا من الدائرتين الى جزأين متماثلين

٣ إذا تقاطع محيطا دائرتين في نقطة تقاطعا في نقطة أخرى وكان خط مركبيهما عمودا على الوتر المشترك بينهما مازا بمتصفه



نفرض أن الدائرتين اللتين مركزاهما  $م م$  تقاطعتا في  $ا$  نزل من  $ا$  العمود  $ا ح$  على  $م م$  ثم نمده على استقامته الى  $ب$  بحيث يكون البعد  $ا ح = ا ب$  فالنقطتان  $ا ب$  ل إذن متماثلتا الوضع بالنسبة الى خط المراكزين  $م م$  ومن حيث ان احدهما  $ا$  واقعة على كل من المحيطين فان الأخرى  $ب$  تقع على المحيطين ايضا (نتيجة من الخاصة ١)

ومن حيث ان  $ا ح = ا ب$  وهو أيضا عمود على  $م م$  بالعمل  
∴ خط المراكزين  $م م$  عمود على الوتر المشترك مازا بمتصفه

## في الأوتار

### نظرية ٣١

المستقيم المار بمركز الدائرة والمنصف لأي وتر فيها غير مار بالمركز عمود على هذا الوتر وبالعكس إذا كان هذا المستقيم عمودا على الوتر فإنه ينصفه



إذا فرضنا ان  $ا ب ح$  دائرة مركزها  $م$  وأن  $س$  ينصف الوتر  $اب$  غير المار بالمركز  $م$  فإنه يطلب إثبات أن  $س$  عمود على  $اب$  لذلك نصل  $ا م ب م$

البرهان — في المثلثين  $ا م س$  و  $ب م س$

فرضا

$$ا س = ب س$$

$$م س$$

$$م س$$

$$ا س = ب س$$

$$\therefore ا س = ب س$$

ولكونهما متجاورين

وهو المطلوب

$م س$  عمود على الوتر  $اب$

∴

$م س$  عمود على  $اب$

وبالعكس إذا فرضنا أن

$م س$  ينصف  $اب$

فإنه يطلب إثبات أن

$م س$  عمود على  $اب$

البرهان — في المثلثين

القائمي الزاوية

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

$$ا س = ب س$$

من حيث ان

$ا س = ب س$

$ا س = ب س$

$ا س = ب س$

$ا س = ب س$

$ا س = ب س$

$ا س = ب س$

$ا س = ب س$

$ا س = ب س$

$ا س = ب س$

(نظرية ١٨)

وهو المطلوب

$م س$  ينصف  $اب$  في نقطة  $س$

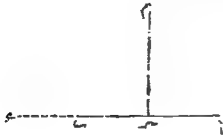
أي أن

نتيجة ١ — المستقيم المقام عمودا على وتر في دائرة من منتصفه يمر بمركزها

نتيجة ٢ - المستقيم لا يمكن أن يقطع الدائرة في أكثر من نقطتين  
لأنه إذا فرض أن مستقيماً قطع دائرة مركزها م في  
النقطتين أ و ب

وأزل من م العمود م د على أ ب

حدث أن أ د = ب د



فلو قطعنا الدائرة المستقيم أ ب في نقطة ثالثة مثل د

لكان أ د = ب د مساوياً د وهذا محال

نتيجة ٣ - وتر الدائرة يكون بنامه فيها

### تمارين

(عددية وتخطيطية)

١ في شكل نظرية ٢١ إذا كان الوتر أ ب = ٨ سنتيمترات م د = ٣ سنتيمترات فما  
طول أ د ارسم الشكل وحقق الناتج بالقياس

٢ المطلوب إيجاد طول الوتر الذي على بعد ٥ سنتيمترات من مركز دائرة نصف قطرها  
١٣ سنتيمتراً

٣ ارسم وترين في دائرة نصف قطرها سنتيمتران طول أحدهما ٣,٢ من السنتيمترات وطول  
الأخر ٢,٤ من السنتيمترات ثم أوجد مقدار بعديهما عن مركز الدائرة بالحساب وحققه بالقياس

٤ ارسم وترًا طوله ٦ سنتيمترات في دائرة قطرها ٨ سنتيمترات واحسب بعد الوتر عن مركز  
الدائرة لأقرب مليمتروحقق الناتج بالقياس

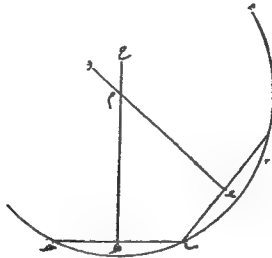
٥ دائرة قطرها ١٨٥ سنتيمتراً مرسوم فيها وتر طوله ١٧٥ سنتيمتراً والمطلوب حساب بعد هذا  
الوتر عن المركز ووضع رسم لذلك (بقياس سنتيمتر لكل ٥٠ سنتيمتراً) يمكن بواسطة تحقيق  
الناتج بالقياس

٦ أ ب وتر طوله ٢,٤ من البوصات مرسوم في دائرة مركزها م ونصف قطرها ١,٣ من البوصات  
ما مساحة المثلث أ ب م

٧ ل د نقطتان البعد بينهما ٦ سنتيمترات والمطلوب رسم دائرة تمر بهما نصف قطرها ٣,٤  
من السنتيمترات واستخراج بعد المركز عن الوتر ل د بالحساب وتحقيق ذلك بالقياس

### نظرية ٣٢

كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لا يمكن أن يمر بها إلا محيط دائرة واحد



الفرض ١ ٦ ب ٦ ٦ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة  
والمطلوب إثبات أنه لا يمكن أن يمر بهذه النقط إلا محيط دائرة واحد  
لذلك نصل

ثم نقيم على ١ ب ٦ ٦ ٦ من منتصفها العمودين د و ه ٦ ٦  
فمن حيث أن المستقيمين ١ ب ٦ ٦ ٦ ليسا على استقامة واحدة فالعمودان د و ه ٦ ٦  
لا يمكن أن يتوازيا فينقاطان في م

البرهان — من حيث أن د و ه عمود على ١ ب من منتصفه

∴ كل نقطة من نقطه على بعدين متساويين عن ١ ب (عملية ١٤)

وكذلك كل نقطة من نقط ه ٦ على بعدين متساويين عن ١ ب ٦ ٦

∴ نقطة م على أبعاد متساوية عن ١ ب ٦ ٦ لأنها نقطة تقاطع العمودين

ومن حيث أنه لا يوجد نقطة خلافا على أبعاد متساوية عن ١ ب ٦ ٦ ٦

∴ الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها ١ ب تمر بالنقطتين ب ٦ ٦ ويكون محيط هذه

الدائرة هو المحيط الوحيد الذي يمر بالنقط الثلاث المعلومة وهو المطلوب

نتيجة ١ — يكفي لتعيين وضع الدائرة ومساحتها معرفة ثلاث نقط قط من محيطها لأنه بذلك

يتعين وضع المركز وطول نصف القطر

نتيجة ٢ — لا يمكن أن يشترك محيطا دائرتين في أكثر من نقطتين إلا إذا انطبق كل على الآخر

تمام الانطباق لانهما ان اشتراكا في ثلاث نقط لزم أن يتحدا في كل من المركز ونصف القطر

فرض عملي — يؤخذ من نظرية ٣٢ أنه يمكن فرض رسم محيط دائرة يمر برؤوس مثلث معلوم

تعريف — يقال للدائرة المسطرة برؤوس المثلث أنها مرسومة عليه أو مرسومة خارجه

## تمارين على نظريتي ٣١ و ٣٢

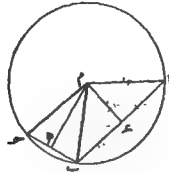
(مسائل نظرية)

- (١) اذا قطع مستقيم دائرتين متحدتي المركز فان جزأيه المحصورين بين محيطيهما متساويان
- (٢) دائرتان مركزهما  $A$  و  $B$  متقاطعتان في  $C$  و  $D$  برهن على أن مركزيهما  $A$  و  $B$  ومتتصف الوتر المشترك  $CD$  على استقامة واحدة
- وعلى ذلك برهن على أن خط المراكزين عمود على الوتر المشترك ما لم يتمتصفه
- (٣)  $A$  و  $B$  و  $C$  وتران متساويان في دائرة برهن على أن منتصف  $AB$  يمر بالمركز
- (٤) أوجد المحل الهندسي لمراكز جميع الدوائر التي تمر بنقطتين معلومتين
- (٥) ارسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين على شرط أن يكون مركزها على مستقيم معلوم . متى تستحيل هذه المسئلة
- (٦) ارسم دائرة نصف قطرها معلوم تمر بنقطتين معلومتين . متى تستحيل حل هذه المسئلة



### نظرية ٣٣

إذا أمكن مد ثلاثة مستقيمتين متساوية من نقطة داخل دائرة إلى محيطها كانت النقطة المذكورة مركز الدائرة



إذا فرضنا أن  $AB$  = الدائرة الملوحة وأن  $M$  نقطة داخلها وأن المستقيمتين  $MA$   $MB$   $MC$  المدودة منها إلى محيط الدائرة متساوية

فانه يطلب إثبات أن  $M$  مركز الدائرة  $AB$

لذلك نصل  $AB$   $BC$   $CA$

وننصف  $AB$  في  $D$   $BC$  في  $E$   $CA$  في  $F$

ونصل  $MD$   $ME$   $MF$

البرهان - في المثلثين  $MAA$   $MBB$   $MCC$

$$\left. \begin{array}{l} MA = MB \\ MB = MC \\ MC = MA \end{array} \right\} \text{من حيث أن}$$

بالفرض

(نظرية ٧)

$$\therefore MD = ME = MF$$

ولكنهما متجاورين فكل منهما قاعة

ولكون المستقيم  $MD$  عموداً على  $AB$  من منتصفه

يمر بمركز الدائرة (نظرية ٣١ نتيجة ١)

وكذلك المستقيم  $ME$

ومن حيث أن  $MD$   $ME$   $MF$  لا يتقاطعان إلا في  $M$  فهي المركز وهو المطلوب

## تمارين على الأوتار

(مسائل عددية وتخطيطية)

- ١ أ ب ٦ ب ٦ مستقيمان متعامدان طول الأول ٤ سنتيمترات والثاني ٧,٥ من السنتيمترات والمطلوب رسم دائرة تمر بالنقط أ ب ٦ وحساب طول نصف قطرها وتحقيقه بالقياس
- ٢ ارسم دائرة يكون فيها الوتر الذى طوله ٦ سنتيمترات على بعد ٣ سنتيمترات من المركز واحسب طول نصف القطر لأقرب مليمتروحققه بالقياس
- ٣ ارسم دائرة قطرها ٨ سنتيمترات وارسم فيها وترًا مساويًا لنصف القطر ثم احسب بعد هذا الوتر عن المركز لأقرب مليمتروحققه بالقياس
- ٤ دائرتان نصف قطر أحدهما ٢٦ سنتيمترا ونصف قطر الأخرى ٢٥ سنتيمترا تقاطعتان فخطين البعد بينهما ٤٨ سنتيمترا والمطلوب حساب مقدار البعد بين المركزين ووضع رسم لذلك (بقياس سنتيمتر لكل ١٠ سنتيمترات) وتحقيق الناتج بالقياس
- ٥ وتران متوازيان في دائرة قطرها ١٣ سنتيمترا طول أحدهما ٥ سنتيمترات والآخر ١٢ سنتيمترا بين أن البعد بينهما إما أن يكون ٨,٥ من السنتيمترات أو ٣,٥ من السنتيمترات
- ٦ وتران متوازيان في دائرة في جهة واحدة من مركزها طول أحدهما ٦ سنتيمترات والآخر ٨ والبعد بينهما سنتيمترا واحد والمطلوب حساب مقدار نصف القطر وقياسه
- ٧ يرب على ورق المربعات أنه إذا ركز في أى نقطة على محور السينات ورسم محيط دائرة يمر بالنقطة (٥ ٦) فإنه لابد أن يمر بالنقطة (٦ ٥) (راجع صفحة ١٤٣)

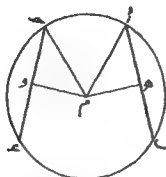
(مسائل نظرية)

- ٨ المستقيم الواصل بين منتصفى وترين متوازيين في دائرة يمر بمركزها
- ٩ أوجد المحل الهندسى لمتصفات الأوتار المتوازية في الدائرة
- ١٠ الوتران المتقاطعان في الدائرة لا ينصف أحدهما الآخر إلا إذا كان كل منهما قطرا
- ١١ نقطة تقاطع قطرى متوازي الأضلاع المرسوم داخل <sup>(١)</sup> دائرة تكون مركز هذه الدائرة
- ١٢ متوازي الأضلاع الذى يمكن رسمه داخل دائرة لا يكون إلا مستطيلا أو مربعا

(١) الشكل المرسوم داخل دائرة مامر محيطها برؤوسه

## نظرية ٣٤

الاقطار المتساوية في الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها وبالعكس الاقطار التي على أبعاد متساوية عن المركز متساوية



إذا فرضنا أن  $ا ب ٦ د$  وتران في الدائرة التي مركزها  $م$   
وان  $م هـ ٦ م و$  عمودان عليهما من  $م$   
(فاولاً) إذا كان  $ا ب = د$   
فانه يطلب إثبات أن البعد  $م هـ =$  البعد  $م و$   
لذلك نصل  $م ا ٦ م د$   
البرهان — من حيث أن  $م هـ$  عمود على  $ا ب$   
 $\therefore$   $م هـ$  ينصف  $ا ب$  (نظرية ٣١)  
أي أن  $ا هـ = هـ ب$   
وكذلك  $د و = و ز$   
لكن  $ا ب = د$  فرضاً  
 $\therefore$   $ا هـ = هـ ب = د و = و ز$   
ثم انه في المثلثين  $م هـ ا ٦ م هـ د$   
من حيث أن  $د هـ ا = ا هـ د$  والضلع  $م هـ$  مشترك  
 $٦$   $ا هـ = هـ ب$  والضلع  $م هـ$  مشترك  
 $\therefore$  يتطابق المثلثان (نظرية ١٨)  
ومنه يتبع أن  $م هـ = م و$  وهو المطلوب  
(وثانياً) بالعكس إذا كان  $م هـ = م و$   
فانه يطلب إثبات أن  $ا ب = د$



البرهان — ثبت مما تقدم أن ١ هـ نصف ا ب ٦ و نصف ح د

في المثلثين ١ هـ ا ٦ ٢ و ح

بالقياس

د ١ هـ ا = ١ هـ ا ٢ و ح

٦ ١ هـ ا = ١ هـ ا ٢ و ح

٦ ١ هـ ا = ١ هـ ا ٢ و ح

من حيث ان

(نظرية ١٨)

∴ ١ هـ ا = ١ هـ ا ٢ و ح

∴ متلاك كل منهما متساويان

وهو المطلوب

أى أن ١ هـ ا = ١ هـ ا ٢ و ح

(مسائل نظرية)

١ المطلوب إيجاد المحل المنتمى لمتصفات الأوتار المتساوية في الدائرة

٢ إذا تقاطع وتران في دائرة وكان المستقيم الواصل من نقطة تقاطعهما إلى المركز منصفًا للزاوية المحصورة بينهما كان هذان الوتران متساويين

٣ إذا تقاطع وتران متساويان في دائرة فإن جزأى أحدهما يساويان جزأى الآخر لنظيره

٤ المطلوب رسم وتر في دائرة معلومة يساوى طولاً معلوماً (على شرط ألا يكون أكبر من القطر) ويوازي مستقيماً معلوماً

٥ ل هـ وتر معلوم في دائرة ا ب ٦ قطر فيها والمطلوب إثبات أن مجموع العمودين النازلين من ا ب على ل هـ أو الفرق بينهما ثابت مهما تغير وضع القطر

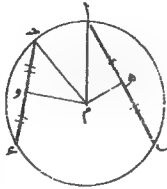
(مسائل تخطيطية)

٦ دائرة نصف قطرها يساوى ا د ٤ من الستيمترات رسم فيها عدة أوتار متساوية طول كل منها ١٨ من الستيمترات اثبت أن متصفات هذه الأوتار على محيط دائرة واحد واحسب طول نصف قطرها ثم قس به أن ترسمها

٧ البعد بين مركزي دائرتين هو ٨ ستيمترات وطول الوتر المشترك بينهما ٨ من الستيمترات ونصف قطر الدائرة الكبرى ٧ من الستيمترات اذكر حلاً لإيجاد تقاطع الدائرتين واوجد طول نصف قطر الدائرة الصغرى

### نظرية ٣٥

إذا اختلف بعدا وترين عن مركز الدائرة فأقرب الوترين أكبرهما وبالعكس أكبر الوترين أقربهما من المركز



- نفرض أن  
وان  
(١) إذا كان  
(٢) إذا كان  
لذلك نصل  
البرهان — من حيث أن  
∴  
أى أن  
وكذلك  
ومن حيث أن  
∴  
ولكون  
∴  
وكذلك  
∴
- أ ب ك د وتران في دائرة مركزها م  
م ه م و العمودان التازلان من م عليهما وثبتت أنه  
م ه أصغر من م و يكون  
أ ب أكبر من م و  
أ ب أكبر من م و يكون م ه أصغر من م و  
م ا م ب م ج م د  
م ه عمود على الوتر أ ب  
م ه ينصف أ ب  
أ ه = ب ه  
ح و = د و  
م ا = م ب  
المربع المنشأ على م ا = المربع المنشأ على م ب  
م د ه ا قائمة  
المربع المنشأ على الوتر م ا = مجموع المربعين المنشأين على م ه م ب  
المربع المنشأ على م ج = مجموع المربعين المنشأين على م د م و  
مجموع المربعين المنشأين على م ه م ب = مجموع المربعين المنشأين على م د م و

فبتسج

(١) اذا كان م ه اصغر من م و فالربع المنشأ على م ه اصغر من المربع المنشأ على م و

∴ المربع المنشأ على ه ا لابد أن يكون أكبر من المربع المنشأ على م و

∴ ه ا أكبر من م و

∴ ا ب أكبر من م و

(٢) وبالعكس اذا كان ا ب أكبر من م و

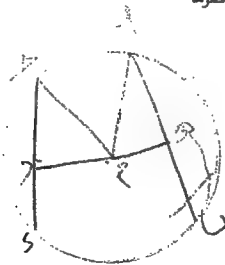
اى أنه اذا كان ه ا أكبر من م و

فالربع المنشأ على ه ا أكبر من المربع المنشأ على م و

∴ لابد أن يكون المربع المنشأ على م ه اصغر من المربع المنشأ على م و

∴ م ه اصغر من م و وهو المطلوب

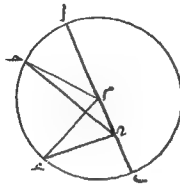
نتيجة — أكبر أوتار الدائرة قطرها



[illegible]

## نظرية ٣٦ ١٠٥٠

إذا رسم من نقطة داخل دائرة غير مركزها عدة مستقيمت إلى محيطها فأكبرها ما كان ما إذا بالمركز وأصغرها هو امتداد الأكبر ليكون قطراً وأكبر المستقيمت الأخرى ما كان مقابلاً لأكبر زاوية مركزية (والزاوية المركزية ما كان رأسها في مركز الدائرة)



فإذا فرض أن

ا ب د دائرة و د نقطة ما غير المركز داخلها

ورسم من د المستقيم د ا ما إذا بالمركز والمستقيم د ب على استقامة ا د والمستقيمت د ج د د ب د

وكانت الزاوية المركزية د ا ب التي يقابلها د ج أكبر من د ب د التي يقابلها د ب د فانه يطلب إثبات أن

(١) د ا أكبر المستقيمت

(٢) د ب أصغرها

(٣) د ج أكبر من د ب د

لذلك نصل د ا د ب د

البرهان (١) في ه د ا مجموع الضلعين د ا د ب د أكبر من د ج د ب د (نظرية ١١)

لكن د ا د ب د لأنهما نصف قطر

∴ د ا د ب د أكبر من د ج د ب د

أي أن د ا أكبر من د ج د ب د



وذلك يرهن على أن ١ أ أكبر من أي مستقيم آخر يرسم من ٥ إلى المحيط  
 ∴ ١ أ أكبر هذه المستقيمت

(۲) في  $\Delta$  مجموع الضلعين  $6\text{ م} + 5\text{ م}$  أكبر من الضلع  $7\text{ م}$   
 لكن  $7\text{ م} = 2\text{ م} + 5\text{ م}$  لأشهما نصفاً نظرين  
 $\therefore 6\text{ م} + 5\text{ م}$  أكبر من  $7\text{ م}$

وبطرح الجزء المشترك  $\frac{m}{m}$  ينتج أن  
 $\frac{d}{d} = \frac{a}{a}$  أكبر من  $\frac{b}{b}$

ويمكن أيضا إثبات أن أي مستقيم آخر يمر من  $\odot$  إلى المحيط يكون أكبر من  $\odot$  ب  
 $\odot$  أصغر هذه المستقيمت

(۳) فی ۵۴۶ ۶ ۵۴۵  
(۴) ۵۴۵ ۵۴۶ ۵۴۷

من حیث ان  $\left. \begin{array}{l} 6 \text{ م} = 2 \text{ م} \\ 2 \text{ م} \text{ أكبر من } 2 \text{ م} \end{array} \right\}$  مشترك  
لأنهما نصفاً قطرين  
فرضاً

∴  $\Rightarrow$  أكبر من  $\Rightarrow$  (نظرية ١٩) وهو المطلوب

## تمارين

(مسائل متنوعة)

١ برهن على أن جميع الدوائر التي تمر بنقطة معلومة ومراكزها على مستقيم معلوم غير ماز بالنقطة المعلومة يجب أن تمر جميعها بنقطة أخرى ثابتة

٢ إذا قطع مستقيم دائرتين متقاطعتين وكان موازيا لوترهما المشترك فإن جزأى التقاطع المحصورين بين محيطي الدائرتين متساويان

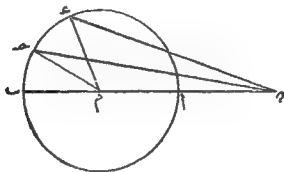
٣ إذا تقاطعت دائرتان فأى مستقيمين متوازيين يمران بنقطتي تقاطعهما وينتهيان بالمحيطين يكونان متساويين

٤ إذا تقاطع محيطا دائرتين فالمستقيمان المازان باحدى نقطتي التقاطع والمنتهيان بالمحيطين متساويان ان صنعنا مع الوتر المشترك زاويتين متساويتين

٥ دائرتان متقاطعتان طول وترهما المشترك ٢٤ سنتيمترا وقطر احدهما ٧٤ سنتيمترا وقطر الأخرى ٤٠ سنتيمترا ما طول البعد بين مركزيهما ارسم الشكل ( ببقياس سنتيمتر لكل ١٠ سنتيمترات )  
حقق النتائج بالقياس

٦ ارسم دائرتين نصف قطر احدهما سنتيمتران ونصف قطر الأخرى ٣,٤ من السنتيمترات والبعد بين المركزين ٤,٢ من السنتيمترات واحسب طول الوتر المشترك ومقدار بعده عن كل من المركزين وحقق ذلك بالقياس

إذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها عدة مستقيمت إلى المحيط فأكبرها ماس بالمرکز وأصغرها ما إذا امتد على استقامته من بالمرکز وأكبر المستقيمت الأخرى ما كان مقابلاً لأكبر زاوية مركزية



وان  $\Rightarrow$  النقطة المفروضة خارجها ورسمنا المستقيمتين  $ab$  و  $6$   $\Rightarrow$   $6$  الى محيطها  
وكانت الاول منها مازا بالمركز  $م$  والزاوية المركزية  $\Rightarrow$   $م$  التي يقابلها  $\Rightarrow$  أكبر من الزاوية  
المركزية  $\Rightarrow$   $م$  التي يقابلها  $\Rightarrow$   
فانه يطلب إثبات أن

- لذلك فصل ٢٦ م ٥

لأنهما نصفان قطرين  $m = n$

ب اکیرمن ۵۶

هـ ب أكبر المستقيمات

هـ ٥ م' ٥ مجموع الفضلین ٥ ٥ ٦ م ٥ أكبر من ٥ م

د و أكبر من الجزء الباقي د ا

في الجزء الباقي

وكذلك يمكن إثبات أن أى مستقيم آخر يخرج من النقطة  $\odot$  الى محيط الدائرة يكون أكبر من  $\odot$  ١

ای آن ۱۵ اصغر المستقیمات

(۳) فی ۵۴۶ ۵۴۶ ۵۴۶

هـ م مشترك

لأنهما نصفنا قطرين

$$s \uparrow = \tau \uparrow$$

۴۳- اکبر من د ٥ م و فرضا

∴  $\Rightarrow$  أكبر من  $\Rightarrow$  (نظرية ١٩) وهو المطلوب

## تمارين

(مسائل متنوعة)

١ المعلوم دائرتان غير متقاطعتين والمطلوب إيجاد أطول وأقصر المستقيمتين التي أحدها طرفيها على أحد المحيطين والطرف الآخر على المحيط الثاني

٢ إذا فرضت نقطة على محيط دائرة ورسم منها مستقيمتين منتهية بالمحيط فان أكبرها ما مر بالمركز وأكبر أي اثنين آخرين ماقابل زاوية مركزية أكبر مما قابلهما الآخر

٣ أكبر المستقيمتين المأزاة بإحدى نقطتي تقاطع دائرتين والمنتهية بالمحيطين ما كان موازيا لخط المركزين

٤ ارسم دائرتين على ورق المربعات مركزاهما على محور السينات على شرط أن يتقاطعا في نقطة (٨ ٦ - ١١) وأوجد البعدين الاحداثيين لنقطة تقاطعهما الأخرى

٥ ارسم على ورق المربعات دائرتين مركز إحداهما النقطة (١٥ ٦ ٠) ومركز الأخرى النقطة (٦ - ١٠) على شرط أن يتقاطعا في نقطة (٨ ٦ ٠) وأوجد طول كل من نصفي القطرين والبعدين الاحداثيين لنقطة التقاطع الأخرى

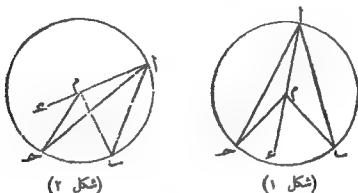
٦ ارسم مثلثا متساوي الساقين م ا ب زاوية رأسه م = ٨٠° ثم ارسم دائرة مركزها م ونصف قطرها م ا وفرض على المحيط النقط ح ٦ د ه على شرط أن تكون كلها في جهة ا ب التي فيها المركز ثم قس كلا من الزوايا ح ٦ د ه التي يقابلها الوتر ا ب فاذا غيرت مقدار د م وقست الزوايا ح ٦ د ه كما تعلم فما هي النتيجة التي تصل اليها

## في الزوايا المرسومة في قطعة من الدائرة والزوايا المركزية والمحيطية

تبيـه — الزوايا المركزية ما كان رأسها في مركز الدائرة وضلعها نصفى قطرين والمحيطية ما كان رأسها على المحيط وضلعها وترين

### نظريـة ٣٨

الزاوية المركزية ضعف الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس المحصورين ضلعيا



اذا فرضنا أن  $ا ب د$  دائرة مركزها  $م$  وأن  $د م ب$  زاوية مركزية  $ب ك ا$  زاوية محيطية  
مشتركة معها في القوس  $ب د$  المحصورين ضلعيا

فانه يطلب إثبات ان  $د م ب = ٢ د ب ا$   
لذلك نصل

$ا م ا$  ونعده الى  $د$   
البرهان — في

من حيث ان  $د م ب = ا م ا$

$د م ب = ا م ا$   $\therefore$

$د م ب = ا م ا + ا م د$   $\therefore$

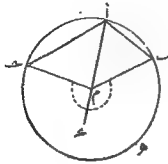
لكن  $د م ب$  الخارجة =  $ا م د + ا م ا$

$د م ب = ا م د + ا م ا$   $\therefore$

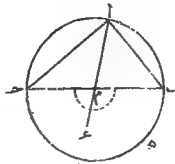
وكذلك يمكن إثبات أن  $د م ب = ا م د + ا م ا$

وبجمع هذين الناتجين في (الشكل ١) وإيجاد الفرق بينهما في (الشكل ٢)

ينص أن  $د م ب = ٢ د ب ا$  وهو المطلوب



(شكل ١)



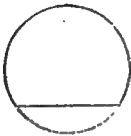
(شكل ٢)

ملاحظة — إذا كان القوس  $\alpha$  هـ المرسومة عليه الزاوية  $\alpha$  نصف محيط كذا في (شكل ٣) كانت الزاوية المركزية  $\alpha$  مستقيمة وإذا كانت أكبر من نصف محيط كذا في (شكل ٤) كانت الزاوية  $\alpha$  منعكسة

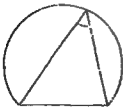
والبرهان المتقنم على (شكل ١) يمكن تطبيقه هنا من غير تغيير فيه مطلقا

أي أن  $\alpha = 2\alpha$   $\alpha$  المشتركة معها في القوس  $\alpha$  هـ المحصور بين ضلعها سواء كان طول هذا القوس مساويا لنصف المحيط أو أصغر منه أو أكبر منه

### تعريف



القوس هي جزء الدائرة المحصور بين قوسين وترين يسمى الوتر أحيانا بقاعدة القوس

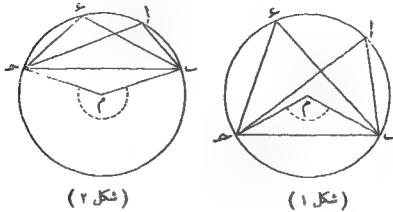


الزاوية المرسومة في القوس هي ما كان رأسها على قوس القوس وضلعها متجهين بطرفي وترها

تبيته — نقسم في نظرية ٢٢ أنه يمكن أن يمر بكل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة محيط دائرة أما رسم دائرة تمر بأربع نقط فيستلزم شروطا خاصة

### نظرية ٣٩

الزوايا المرسومة في قطعة واحدة من الدائرة متساوية



(شكل ٢)

(شكل ١)

إذا فرضنا أن الزاويتين  $\angle CAB$  و  $\angle CDB$  مرسومتان في قطعة واحدة  $AB$  من الدائرة التي مركزها  $M$

فانه يطلب إثبات أن  $\angle CAB = \angle CDB$

لذلك نصل  $MA$  و  $MB$

البرهان -  $\angle CAB$  و  $\angle CDB$  مركبة  $\angle CAB$  محيطية مشتركة معها في القوس  $AB$

$\therefore \angle CAB = \angle CDB$  (نظرية ٣٨)

وكذا  $\angle CDB = \angle CAB$

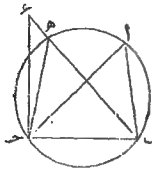
$\therefore \angle CAB = \angle CDB$

تنبيه - ربما كانت القطعة المرسومة فيها الزاوية أكبر من نصف الدائرة (شكل ١) أو أصغر منه (شكل ٢) ففي الحالة الثانية تكون الزاوية المركزية  $\angle AMB$  منعكسة لكنها لا تزال تساوي ضعف كل من الزاويتين المحيطيتين المرسومتين في القطعة وذلك بتطبيق نفس البرهان المتقدم في نظرية ٣٨



### عكس نظرية ٣٩

الزوايا المتساوية المرسومة على قاعدة واحدة في جهة واحدة منها تكون رؤوسها على قوس دائرة هذه القاعدة وتر فيها



انذا فرضنا أن  $\angle C = \angle D$  و  $\angle C$  و  $\angle D$  زاويتان متساويتان ومرسومتان على قاعدة واحدة  $AB$  وفي جهة واحدة منها

فانه يطلب إثبات أن  $C$  و  $D$  تقعان على قوس دائرة يكون  $AB$  وتر فيها

لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط  $A$  و  $B$  و  $C$  فان مر بالنقط  $D$  ثبت المطلوب وإلا فانه يقطع المستقيم  $AB$  وإن كانت  $D$  خارج الدائرة أو امتداده إن كانت  $D$  داخلها

فإذا كانت  $H$  نقطة تقاطع المحيط بالمستقيم  $AB$  أو بامتداده فنصل  $H$

البرهان  $\angle D = \angle H = \angle C$  لأنهما مرسومتان في قطعة واحدة

لكن  $\angle D = \angle C$  فرضاً

$$\therefore \angle D = \angle H = \angle C$$

وهذا لا يتأتى إلا إذا وقعت النقطة  $H$  على النقطة  $D$

$\therefore$  المحيط المار بالنقط  $A$  و  $B$  و  $C$  يجب أن يمر بالنقطة  $D$

نتيجة — المثل الهندسي لرؤوس المثلثات المرسومة على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها وزوايا رؤوسها متساوية هو قوس دائرة

### تمارين على نظرية ٣٩

١ في (شكل ١) إذا كانت  $\angle C = 74^\circ$  فما مقدار كل من الزوايا  $\angle A$  و  $\angle B$  و  $\angle D$

٢ في (شكل ٢) إذا فرض أن  $M$  نقطة تقاطع  $AB$  وكانت  $\angle A = 40^\circ$  والزوايا  $\angle M = 10^\circ$  فما مقدار  $\angle C$  و  $\angle D$  وما مقدار  $\angle B$  و  $\angle D$  المتعكسة

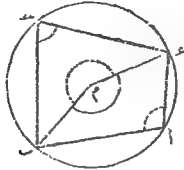
٣ في (شكل ١) إذا كانت  $\angle C = 43^\circ$  و  $\angle A = 82^\circ$  فما مقدار كل من الزوايا  $\angle B$  و  $\angle D$  و  $\angle C$  و  $\angle D$

٤ في (شكل ٢) برهن على أن  $\angle C = \angle D$  أقل دائماً من  $\angle A$  و  $\angle B$  بقدر  $\angle A$  قائمة

[في صفحة ١٨٨ تمارين أخرى على نظرية ٣٩]

## نظرية ٤٠

الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي المرسوم داخل دائرة متكاملتان



إذا فرضنا أن  $ABCD$  شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة  $ABCD$  فإنه يطلب إثبات أن

$$(١) \quad \angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$(٢) \quad \angle B + \angle D = 180^\circ$$

لذلك نفرض أن  $M$  مركز الدائرة

ونصل  $MA, MB, MC, MD$

البرهان -  $\angle A + \angle C$  المحيطية  $= \frac{1}{2} \angle AOC$  المركزية المشتركة معها في القوس  $AB$

وكذلك  $\angle B + \angle D$  المحيطية  $= \frac{1}{2} \angle BOD$  المركزية المنعكسة المشتركة معها في القوس  $BC$

$\therefore$  مجموع الزاويتين  $ABCD = \frac{1}{2} (\angle AOC + \angle BOD) = \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle COD$  المنعكسة

لكن مجموع هاتين الزاويتين الأخيرتين  $= 180^\circ$

$$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$$

وهو المطلوب

$$\text{وكذلك} \quad \angle B + \angle D = 180^\circ$$

تنبيه - بمقارنة نظريتي ٣٩ و ٤٠ إحداها بالأخرى نجد في نظرية ٣٩ أن الزوايا المرسومة

في قطعة واحدة من الدائرة متساوية وفي نظرية ٤٠ أن الزاويتين المرسومتين في قطعتين متقابلتين في دائرة متكاملتان

(١) تقدم أن الشكل المرسوم داخل دائرة مامر محيطها برؤوسه

### عكس نظرية ٤٠

اذا كانت الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي متكاملتين أمكن أن يمر برؤوسه محيط دائرة واحد

اذا فرضنا أن  $a, b, c, d$  شكل رباعي فيه الزاويتان  $b$  و  $c$  متكاملتان

فانه يطلب إثبات أنه يمكن أن يرسم محيط دائرة واحد يمر بالنقط الأربع  $a, b, c, d$  و

لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط الثلاث  $a, b, c$  و

فان مر بالنقطة الرابعة  $d$  ثبت المطلوب والاقطع  $d$  أو امتداده في  $h$

نصل  $h, d$

البرهان — من حيث أن  $a, b, c, d$  شكل رباعي داخل دائرة

$\therefore d, a, h, c$  تكمل  $d, a, b, c$

لكن  $d, a, c, b$  تكمل  $d, a, b, c$  فرضا

$\therefore d, a, h, c = d, a, c, b$

وهذا لا يتأتى إلا اذا وقعت  $h$  على  $d$

$\therefore$  فالدائرة التي يمر محيطها بالنقط  $a, b, c, d$  يجب أن يمر بالنقطة  $d$  أيضا

اي أن  $a, b, c, d$  يمكن أن يمر بها محيط دائرة واحد وهو المطلوب

### تعارين على نظرية ٤٠

١ ارسم في دائرة نصف قطرها  $e$  مستمترات الشكل الرباعي  $a, b, c, d$  الذي فيه زاوية  $a, b, c, d = 136^\circ$  وقس كلا من الزوايا الباقية ومن ذلك بين أن الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة متكاملتان

٢ برهن على نظرية ٤٠ بواسطة نظريتي ٣٩ و ١٦ وذلك بعد أن نصل كل رأسين متقابلين في الشكل بمستقيم

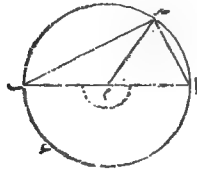
٣ اذا أمكن رسم محيط دائرة يمر برؤوس شكل متوازي الأضلاع فان هذا الشكل إما أن يكون مستطيلا أو مربعا

٤  $a, b, c, d$  مثلث متساوي الساقين رسمنا المستقيم  $ص$  موازيا لقاعدته  $b, c$  وقاطعا لساقيه في  $ص, د$  بين على أن النقط الأربع  $b, c, د, ص$  على محيط دائرة واحد

٥ اذا مد أحد أضلاع الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة على امتداده كانت الزاوية الخارجة مساوية للزاوية الداخلة المقابلة للزاوية التي مد أحد ضلعها

## نظرية ٤١

الزاوية المرسومة في نصف الدائرة قائمة



إذا فرضنا أن  $\angle ACB$  دائرة قطرها  $AB$  ومركزها  $M$  وكانت  $C$  نقطة على نصف المحيط  $AB$  فإنه يطلب إثبات أن  $\angle ACB$  قائمة للبرهنة على ذلك طريقتان

الأولى - من حيث أن  $\angle ACB$  محيطية وزاوية  $\angle AMB$  المستقيمة مركزية وكلاهما مشترك في القوس  $ACB$  المحصور بين ضلعيهما

$$\therefore \angle ACB = \text{نصف الزاوية المستقيمة } \angle AMB$$

$$\text{لكن الزاوية المستقيمة } \angle AMB = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ \text{ وهو المطلوب}$$

الثانية - تفصيل

فمن حيث أن

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB \quad \therefore$$

(نظرية ٥)

$$\angle ACB = 90^\circ \quad \text{ومن حيث أن}$$

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB \quad \therefore$$

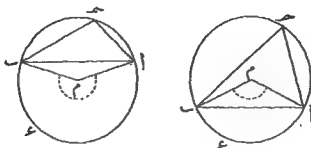
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB + \angle ACB \quad \text{وبالجمع يثبت}$$

$$\text{ومن حيث أن مجموع زوايا المثلث } \angle ACB = 180^\circ \text{ قائمتين}$$

$$\therefore \angle ACB = \text{نصف زاويتين قائمتين}$$

$$= 90^\circ \text{ قائمة وهو المطلوب} \quad \text{أى}$$

نتيجة — الزاوية المرسومة في قطعة أكبر من نصف الدائرة حادة والتي في قطعة أصغر من نصف الدائرة منفرجة



الزاوية المحيطية  $\angle ACB$  تساوي نصف المركزية  $\angle AOB$  لا اشتراكهما في قوس واحد  $AB$   
أولاً — إذا كانت القطعة  $ACB$  أكبر من نصف الدائرة  
فالقوس  $AB$  أصغر من نصف المحيط

$\therefore \angle AOB$  أصغر من قائمتين

$\therefore \angle ACB$  « « قائمة

ثانياً — إذا كانت القطعة  $ACB$  أصغر من نصف الدائرة

فالقوس  $AB$  أكبر من نصف المحيط

$\therefore \angle AOB$  أكبر من قائمتين

$\therefore \angle ACB$  « « قائمة

### تمارين على نظرية ٤١

١ المعلوم مثلث قائم الزاوية والمطلوب إثبات أن محيط الدائرة التي قطرها وتر هذا المثلث يمر برأس الزاوية القائمة

٢ دائرتان متقاطعتان في  $A$   $AB$  برهن على أنه إذا رسمنا من  $A$  القطر  $AC$  في إحدى الدائرتين والقطر  $AD$  في الأخرى كانت النقط  $C$   $D$  على استقامة واحدة

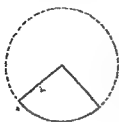
٣ إذا رسمنا دائرة قطرها أحد ساقى مثلث متساوي الساقين فإن محيطها يمر بنصف قاعدته

٤ الدائرتان اللتان قطراهما ضابعا مثلث تتقاطعان في نقطة على الضلع الثالث أو على امتداده

٥ المطلوب إيجاد المحل الهندسي لمتتبع طول معين وطرفاه على مستقيمين متعامدين يتحرك بينهما

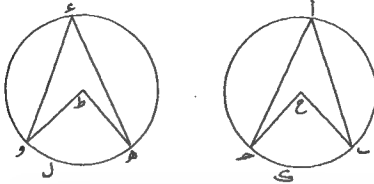
٦ المعلوم دائرة والمطلوب إيجاد المحل الهندسي لمتتبعات أوتارها المارة بنقطة معلومة سواء كانت هذه النقطة داخل الدائرة أو خارجة عنها أو على محيطها

تعريف — قطاع الدائرة هو جزؤها المحدود بنصفى قطرين والقوس المحصور بينهما



### نظرية ٤٢

في الدوائر المتساوية إذا كانت الزوايا المركزية أو المحيطية متساوية كانت أقواسها متساوية



إذا فرضنا أن  $ا ب ح$  و  $هـ و ط$  دائرتان متساويتان وأن الزاويتين المركزيتين  $ب ح ط$  و  $هـ ط و$  متساويتان وعلى ذلك فالزاويتان المحيطيتان  $ا ب ح$  و  $هـ و ط$  متساويتان (نظرية ٣٨)

فانه يطلب إثبات أن القوس  $ب ح ط$  = القوس  $هـ و ط$

البرهان — نطبق الدائرة  $ا ب ح$  على الدائرة  $هـ و ط$  بحيث يقع المركز  $ح$  على المركز  $ط$  ونصنف القطر  $ح ب$  على نصف القطر  $ط هـ$

فن حيث أن  $د ب ح ط$  =  $د هـ ط و$

∴ يقع  $ح ط$  على  $ط و$  وتساوى أنصاف الأقطار تقع  $ب$  على  $هـ و ط$  على  $و$  وينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق

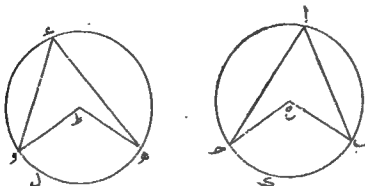
∴ القوس  $ب ح ط$  ينطبق على القوس  $هـ و ط$  وهو المطلوب

نتيجة — في الدوائر المتساوية تساوى القطاعات إذا تساوت زواياها

ملاحظة — من الواضح أن النظريات الخاصة بالأقواس والزوايا والأوتار الواقعة في الدوائر المتساوية يمكن إثبات صحتها فيما لو كانت هذه الأقواس والزوايا والأوتار واقعة في دائرة واحدة

### نظرية ٤٣

في الدوائر المتساوية تساوى الزوايا المركزية أو المحيطية اذا تساوت أقواسها



نقضى أن  $\angle \alpha$  و  $\angle \beta$  دائرتان متساويتان

وأن القوس  $\alpha \beta =$  القوس  $\gamma \delta$  و

ويراد إثبات أن الزاوية المركزية  $\angle \alpha =$  الزاوية المركزية  $\angle \beta$  و

والزاوية المحيطية  $\angle \alpha =$  الزاوية المحيطية  $\angle \beta$  و

البرهان - نطبق النائرة  $\alpha \beta \gamma$  على النائرة  $\beta \delta \epsilon$  و على شرط أن يقع المركز  $\epsilon$  على المركز  $\alpha$   
 $\angle \alpha$  على  $\beta \delta$

فلنكون أنصاف أقطار الدائرتين متساوية

∴ تقع  $\beta$  على  $\epsilon$  وينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق

ولكون القوس  $\alpha \beta \gamma =$  القوس  $\beta \delta \epsilon$  و فرضا

∴ تقع  $\alpha$  على  $\delta$

وبذا ينطبق  $\angle \alpha$  على  $\angle \beta$

∴  $\angle \alpha = \angle \beta$  و  $\angle \gamma = \angle \delta$

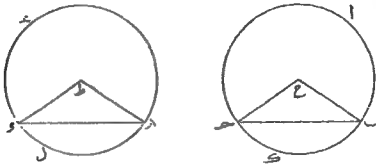
ومن حيث أن الزاوية المحيطية  $\angle \alpha = \frac{1}{2}$  الزاوية المركزية  $\angle \beta$  و

وكذلك  $\angle \gamma = \frac{1}{2}$   $\angle \delta$  و

∴  $\angle \alpha = \angle \beta$  و  $\angle \gamma = \angle \delta$  وهو المطلوب

### نظرية ٤٤

في النوائر المتساوية تتساوى الأقواس اذا تساوت أوتارها القوس الأكبر يساوى الأكبر والأصغر يساوى الأصغر



فرض ان  $ا ب د هـ و$  دائرتان متساويتان مركزهما  $ط$  و  $ع$   
وأن الوتر  $ب د = و هـ$

ويطلب إثبات أن القوس الأكبر  $ا ب د = ا ب د هـ و$   
والقوس الأصغر  $ب د ك = ب د ك هـ ل$

لذلك نصل  $ب ع د هـ و ط$

البرهان — في  $ا ب د هـ و ط$

(لأنهما نصفان قطري دائرتين متساويتين)	$ب د = ط هـ$	} من حيث ان
للسبب عينه	$ط د = ع هـ$	
فرضاً	$ب د = و هـ$	
(نظرية ٧)	$د ب د هـ ط = د ب د هـ و$	∴
(نظرية ٤٢)	القوس $ب د ك = ا ب د هـ ل$	∴

أى أن القوسين الأصغرين متساويان

ومن حيث ان المحيط  $ا ب د ك = ا ب د هـ ل$

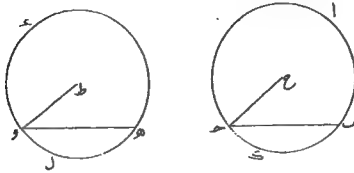
∴ القوس الباقي  $ب ا = ا ب د هـ و$

أى أن القوسين الأكبرين متساويان وهو المطلوب



### نظرية ٤٥

في الدوائر المتساوية تساوى الأوتار إذا تساوت أقواسها



إذا فرضنا أن  $ا ب ح$  و  $د ه و$  دائرتان متساويتان

مركزهما  $ح$  و  $ط$  وأن القوس  $ب ك ح$  = القوس  $ه ل و$

فانه يطلب إثبات أن الوتر  $ب ك$  = الوتر  $ه و$

لذلك نصل  $ح$  و  $ط$  و

البرهان — نطبق الدائرة  $ا ب ح$  على الدائرة  $د ه و$  على شرط أن تقع  $ح$  على  $ط$  و  $ح$  على  $ط$  و

فمن حيث أن أنصاف الأقطار متساوية

∴ تقع  $ح$  على  $و$  وينطبق المحيطان كل على الآخر تمام الانطباق

ومن حيث أن القوس  $ب ك ح$  = القوس  $ه ل و$

تقع  $ب$  على  $ه$

وهو المطلوب

∴ ينطبق الوتر  $ب ك$  على الوتر  $ه و$

## تمارين على الزوايا في الدائرة

١ د نقطة مفروضة على قوس القطعة التي وترها  $ab$  برهن على أن مجموع الزاويتين  $\angle a \angle b$   $\angle a \angle b$  ثابت

٢  $ab$   $ac$  وتران في دائرة متقاطعان في  $s$  برهن على أن زوايا  $\angle a \angle s =$  زوايا  $\angle s \angle b$

٣ دائرتان متقاطعتان في  $a$   $b$  رسمتا المستقيم  $ac$  يمر بالنقطة  $a$  وينتهي طرفاه  $s$   $6$   $s$  بالمحيطين برهن على أنه اذا وصل  $s$   $b$   $6$   $s$   $b$  فمقدار  $\angle b$  ثابت في أى وضع للمستقيم  $ac$

٤ دائرتان متقاطعتان في  $a$   $b$  رسمتا المستقيمين  $ah$   $ac$   $ac$   $ah$  مازين بالنقطة  $a$  وطرفا كل منهما على المحيطين برهن على أن القوسين  $ah$   $ac$   $ah$   $ac$  يقابلان زاويتين متساويتين رأس كل منهما نقطة  $b$

٥ د نقطة مفروضة على قوس قطعة وترها  $ab$  نصف الزاويتان  $\angle a \angle b$   $\angle a \angle b$  بمستقيمين تقاطعا في  $m$  والمطلوب إيجاد المحل الهندسي لهذه النقطة  $m$

٦ اذا تقاطع وتران داخل دائرة فان كل زاوية حادثة من تقاطعهما تساوى الزاوية المركزية المرسومة على نصف مجموع القوسين المحصور أحدهما بين ضلعي هذه الزاوية الحادثة والثاني بين امتداد هذين الضلعين

٧ اذا تقاطع وتران خارج دائرة فان الزاوية المحصورة بينهما تساوى الزاوية المركزية المرسومة على نصف الفرق بين القوسين المحصورين بينهما

٨ اذا تقاطع وتران داخل دائرة وكاتا متعامدين فان مجموع كل قوسين متقابلين محصورين بينهما يساوى نصف المحيط

٩  $ab$  وترتا في دائرة معلومة  $c$  د نقطة تتحرك على أحد القوسين المنقسم اليهما المحيط بهذا الوتر والمطلوب إثبات أن منتصف زاوية  $\angle a \angle b$  يقابل القوس الآخر دائما في نقطة ثابتة

١٠ اذا فرضت نقطة مثل  $a$  على محيط دائرة معلومة ورسم منها الوتران  $ab$   $ac$  وكانت  $s$  منتصف القوس الأصغر  $ab$   $ac$  منتصف القوس الأصغر  $ac$  ثم وصل المستقيم  $as$   $ah$  فقطع  $ab$  في  $s$   $ac$  في  $s$  فانه يطلب إثبات أن  $as =$   $ah$

١١  $ab$  مثلث مرسوم داخل دائرة نصفنا زواياه بمستقيمتين تقابل المحيط في  $s$   $6$   $ac$  برهن على أن زوايا المثلث  $s$   $ac$  تساوى على الترتيب

$$90^\circ - \frac{1}{4} - 90^\circ - \frac{1}{4} - 90^\circ - \frac{1}{4}$$

١٢ إذا فرضنا نقطة مثل  $\odot$  على أحد محيطي دائرتين متقاطعتين في  $a$   $b$  ومعدنا منها الى هاتين القطعتين مستقيمين فانه يطلب إثبات أنه اذا مد هذان المستقيمان على استقامتهما فانهما يحصران بينهما من المحيط الآخر قوسا مقداره ثابت مهما تغير وضع النقطة  $\odot$

١٣ يتساوى المستقيمان الواصلان بين طرفي وترين متوازيين في دائرة سواء كان الطرفان في جهة واحدة او في جهتين مختلفتين

١٤ احدى قطعتي تقاطع دائرتين متساويتين مر بها مستقيمان ينتهي طرفا كل منهما بالمحيطين فاذا كان أحد المستقيمين  $a$   $b$  والآخر  $c$   $d$  فبرهن على أن الوتر  $c$   $d$  = الوتر  $a$   $b$

١٥ دائرتان متقاطعتان أثبت أنه اذا مر بنقطتي التقاطع مستقيمان متوازيان ومتنيان بالمحيطين كان المستقيمان الواصلان بين طرفي هذين المتوازيين من جهة واحدة متساويين

١٦ دائرتان متساويتان ومتقاطعتان في  $a$   $b$  برهن على أنه اذا رسم المستقيم  $c$   $d$  مازا بالنقطة  $a$  ومتنيها بالمحيطين كان  $c$   $d$  =  $a$   $b$

١٧  $a$   $b$   $c$  مثلث متساوي الساقين مرسوم داخل دائرة نصف زاويتا القاعدة بمستقيمين مقابلان المحيط في  $c$   $d$   $e$   $f$  برهن على أنه يجب أن يوجد في الشكل  $b$   $c$   $d$   $e$   $f$  أربعة أضلاع متساوية

واذكر العلاقة التي يجب أن ترتبط بها زوايا المثلث  $a$   $b$   $c$  حتى يصير الشكل  $b$   $c$   $d$   $e$   $f$  متساوي الأضلاع

١٨  $a$   $b$   $c$   $d$   $e$   $f$  شكل رباعي مرسوم داخل دائرة مد الضلعان المتقابلان  $a$   $b$   $c$   $d$  على استقامتهما فتقابل في  $h$  والضلعان الآخران  $c$   $d$   $e$   $f$  فتقابل في  $g$  فاذا تقاطعت الدائرتان المرسومتان على المثلثين  $h$   $e$   $d$   $f$   $a$   $b$  في نقطة  $o$  فان النقط الثلاث  $h$   $g$   $o$  يجب أن تكون على استقامة واحدة

١٩ النقط  $s$   $t$   $u$   $v$   $w$  متصفات أضلاع مثلث والنقطة  $z$  موقع العمود النازل من الرأس على القاعدة برهن على أنه يجب أن يمر بالنقط الأربع  $s$   $t$   $u$   $v$   $w$   $z$  محيط دائرة واحدة

[راجع صفحة ٦٩ تمرين ٢ وصفحة ٨٨ عملية ١٠]

٢٠ برهن بواسطة المسألة السابقة على أن متصفات أضلاع المثلث ومواقع الأعمدة النازلة من رؤوسه على الأضلاع المقابلة لها يجب أن تكون كلها على محيط دائرة واحدة

٢١ اذا رسمت عدة مثلثات على قاعدة واحدة في جهة واحدة منها وكانت زوايا رؤوسها متساوية بأن ساوت زاوية معلومة فان جميع متصفات هذه الزوايا تقابل في نقطة واحدة

٢٢  $a$   $b$   $c$  مثلث مرسوم داخل دائرة ونقطة  $h$  منتصف القوس  $b$   $c$  غير الذي فيه  $a$  فاذا رسمنا من  $h$  القطر  $h$   $d$   $e$   $f$  كانت  $d$   $e$   $f$  مساوية نصف القوس بين الزاويتين  $b$   $c$

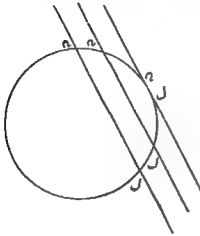
## في التماس

## (تعريف ومبادئ أولية)

١ قاطع الدائرة هو المستقيم الذي يقطع محيطها في نقطتين

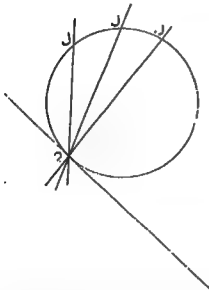
٢ اذا تحرك قاطع الدائرة بحيث تقترب نقطتا التقاطع كل من الأخرى شيئا فشيئا حتى نقيدا فان القاطع في هذا الوضع النهائي يصير مماسا للدائرة في هذه النقطة التي تسمى نقطة التماس

مثال ذلك



أولا — اذا فرضنا أن مستقيما يقطع الدائرة في النقطتين ل و د وتصورنا أنه يتبعد عن المركز شيئا فشيئا موازيا لنفسه فان النقطتين ل و د تقتربان كلما ابتعد القاطع عن مركز الدائرة حتى يأتي وضع فيه نقيدان

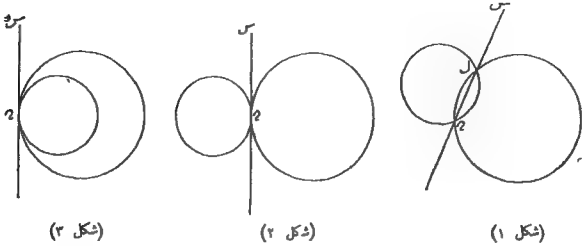
أى أن النقطتين ل و د تصيران في الوضع النهائي نقطة واحدة ويصير القاطع حينئذ مماسا للدائرة في هذه النقطة



ثانيا — اذا فرضنا أن المستقيم يقطع الدائرة في النقطتين ل و د وتصورنا دورانه حول نقطة د وهي ثابتة فان نقطة ل أثناء الدوران تتحرك على المحيط مقربة شيئا فشيئا من د حتى يأتي وضع فيه تقع ل على د ويصير القاطع حينئذ مماسا للدائرة

ومن حيث ان القاطع لا يشترك مع المحيط الا في نقطتين فمن الواضح أن التماس لا يشترك معه إلا في نقطة واحدة هي نقطة التماس التي فيها نقيدتا نقطتا التقاطع ومن ذلك نستخلص التعريف الآتي

٣ مماس الدائرة هو المستقيم الذي لا يشترك مع المحيط إلا في نقطة واحدة مهما امتد



٤ إذا تقاطعت دائرتان في نقطتين ل ٦ (شكل ١) وتصورتا تحرك أحد المحيطين حول ٥ بحيث تكون هذه النقطة ثابتة وبحيث أن النقطة الأخرى ل تقترب منها شيئا فشيئا فإنه يأتي وضع فيه تقع ل على ٥ (شكلي ٢ ٣ ٦) ويقال للدائرتين حينئذ إنهما متماستان في نقطة ٥

ومن حيث أن الدائرتين لا يمكن أن يتقاطعا في أكثر من نقطتين فالدائرتان المتماستان لا يمكن أن تشتركا إلا في نقطة واحدة هي نقطة التماس التي فيها تتحد هطتا تقاطع المحيطين وعلى ذلك لا يقال أن الدائرتين متماستان إلا إذا اشتركا في نقطة واحدة فقط

تنبيه — إذا كانت إحدى الدائرتين التماسيتين خارج الدائرة الأخرى (شكل ٢) يقال إنهما متماستان من الخارج وإذا كانت إحدهما داخل الأخرى فتماستان من الداخل (شكل ٣)

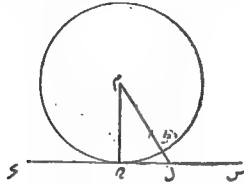
استنتاج من التعريفين ٢ ٦ ٤

إذا فرضنا أن س ل ٥ وتر مشترك بين دائرتين متقاطعتين (شكل ١) وأن إحدى الدائرتين تتحرك حول ٥ بحيث تكون هذه النقطة ثابتة فإن المستقيم س ٥ في حال وقوع ل على ٥ يمر بنقطتين متحدتين ولا يزال كل منهما على محيطي الدائرتين المذكورتين (شكلي ٢ ٣ ٦) وعلى ذلك يكون هذا المستقيم مماسا لكل من الدائرتين وحينئذ

فلكل دائرتين متماستين مماس مشترك في نقطة تماسهما

## نظرية ٤٦

مماس الدائرة في نقطة ما من المحيط عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس



إذا فرضنا أن  $S$  مماس الدائرة التي مركزها  $M$  في نقطة  $N$   
فانه يطلب إثبات أن  $S \perp MN$  عمود على  $MN$   
البرهان — نفرض نقطة ما مثل  $L$  على  $S$  ونصل  $M$  ل  
فن حيث أن  $S$  مماس للدائرة في  $N$  فكل نقطة غيرها يجب أن تكون خارج الدائرة  
 $M$  ل أكبر من نصف القطر  $MN$   $\therefore$

ومن حيث أن أي نقطة أخرى غير  $N$  على المستقيم  $S$  خارجة عن محيط الدائرة  
 $M$  أصغر الأبعاد التي يمكن رسمها من  $M$  إلى  $S$   $\therefore$

فيكون  $MN$  عمودا على  $S$  (نظرية ١٢ نتيجة ١) وهو المطلوب

نتيجة ١ — من حيث أنه لا يمكن أن يقام إلا عمود واحد من  $S$  على  $M$  ينتج أنه لا يمكن  
أن يمد إلا مماس واحد للدائرة من نقطة مفروضة على محيطها

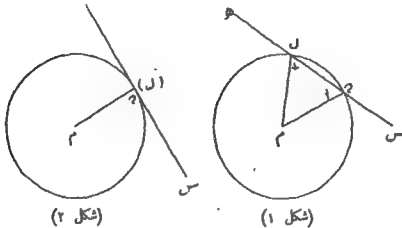
نتيجة ٢ — من حيث أنه لا يمكن أن يقام إلا عمود واحد من  $S$  على  $M$  ينتج أن  
المقام على المماس من نقطة التماس لابد أن يمر بالمركز

نتيجة ٣ — من حيث أنه لا يمكن أن يتركز إلا عمود واحد من  $M$  على المستقيم  $S$  ينتج أن  
نصف القطر العمودي على المماس لابد أن يمر بنقطة التماس

نظرية ٤٦

(طريقة نهاية الأوضاع)

مماس الدائرة في نقطة ما من المحيط عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس



إذا فرضنا أن  $\odot$  نقطة على محيط دائرة مركزها  $M$

فانه يطلب إثبات أن مماس هذه الدائرة في  $\odot$  عمود على نصف القطر  $M \odot$

لذلك نرسم المستقيم  $هـ ل$   $\odot$  س قاطعا للدائرة في  $ل$   $\odot$   $٦$  (شكل ١) ثم نصل  $م ل$   $م ٦$   $\odot$

البرهان — من حيث أن  $م ل = م ٦$

$\therefore \angle م ل هـ = \angle م ٦ هـ$

$\therefore$  مكملتا هاتين الزاويتين متساويتان

أي أن  $م ل هـ = م ٦ هـ$

وهذا حقيقى مهما اقتربت  $ل$  من  $\odot$

وعلى ذلك إذا دار القاطع  $ل$   $\odot$  حول نقطة  $\odot$  بحيث تكون هذه النقطة ثابتة وبحيث تقترب منها

ل شيئا فشيئا حتى تقع عليها يحدث في ذلك الوضع التهاى أن

(١) القاطع  $هـ ل$   $س$  يمس الدائرة في  $\odot$  (شكل ٢)

(٢)  $م ل$  ينطبق على  $م \odot$

فتصير بذلك الزاويتان المتساويتان  $م ل هـ$   $م ٦ هـ$   $\odot$   $س$  متجاورتين

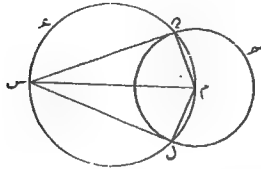
وهو المطلوب

$\therefore$   $م$  عمود على  $هـ ل$   $س$

نتيجه — الطريقة المستعملة في هذا البرهان تعرف بطريقة نهاية الأوضاع

نظرية ٤٧

يمكن أن يمد من نقطة خارج دائرة مماسان لمحيطها



إذا فرضنا أن ل ح د دائرة مركزها م م س نقطة خارجة عنها

فانه يطلب إثبات أنه يمكن مد مماسين من س الى المحيط

نظريك نصل م س ونرسم الدائرة م س د التي قطرها م س فهذه الدائرة تقطع الدائرة المعلومة في التقاطعين ل م د

نصل م س ل م س د م ل م م د

البرهان — من حيث ان كلا من الزاويتين م س ل م م س د م مرسومة في نصف دائرة

م ل عمود على م ل م س د عمود على م د

م ل م س د مماسان للدائرة في ل م د (نظرية ٤٦) وهو المطلوب

نتيجة — إذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها مماسان لها كانا متساويين ومقابلين لزاويتين مركبتين متساويتين

لأنه في المثلثين م س ل م م س د

$$\left. \begin{array}{l} \text{د م س ل م د س د} \\ \text{م م مشترك} \\ \text{م ل م د} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{من حيث ان} \end{array}$$

م س ل م س د

د م س ل م د س د (نظرية ١٨)



## تمارين على التماس

( مسائل عديدة وتخطيطية )

١ ارسم دائرتين متحدين في المركز نصف قطرا أحدهما ٥ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٣ سنتيمترات ثم ارسم عدة أوتار في الدائرة الكبرى تمس محيط الصغرى واستخرج أطوالها بالحساب وقسها وبرهن على تساويها

٢ ارسم عدة أوتار طول كل منها ١,٦ من البوصات داخل دائرة نصف قطرها بوصة وبرهن على أن جميعها تمس دائرة متحدة في المركز مع الأولى ثم أوجد نصف قطر هذه الدائرة

٣ دائرتان متحدتا المركز قطرا أحدهما ١٠ سنتيمترات وقطر الأخرى ٥ سنتيمترات أوجد طول أي وتر في الدائرة الخارجة يمس محيط الداخلة لأقرب مليمتراً ثم حقق الناتج بالقياس

٤ في شكل نظرية ٤٧ إذا فرض أن  $ل = ١,٢٥$  من الأمتار  $٢٦ = ٣,٢٥$  من الأمتار فطول كل من المماسين المرسومين من  $س$  ارسم الشكل ( بمقياس سنتيمترين لكل متر ) وقس لأقرب درجة الزاويتين اللتين رأس كل منهما المركز ٢ وللتين يقابلان المماسين المذكورين

٥ دائرة نصف قطرها ١,٤ من السنتيمترات ٦ من نقطة خارجها رسم منها مماسان للحيط وكان طول كل منهما ٤,٨ من السنتيمترات ما بعد  $س$  عن مركز الدائرة ارسم الشكل وحقق الناتج بالقياس

( مسائل نظرية )

٦ مركز الدائرة التي يمهما مستقيمان متقاطعان يقع على منتصف الزاوية المحصورة بينهما

٧ ا ب ٦ ح مماسان لمحيط دائرة مركزها  $م$  برهن على أن  $أ ب$  ينصف الوتر  $ح$  الواصل بين نقطتي التماس ويكون عموداً عليه

٨ في شكل نظرية ٤٧ إذا وصلنا المستقيم  $ل$  حدث أن  $د ل س = ٢ م د ل$

٩ إذا رسمنا مماساً لمحيط دائرة يقطع مماسين آخرين متوازيين فإن جزء هذا المماس المحصور بين مماسين المتوازيين يقابل زاوية قائمة رأسها مركز الدائرة

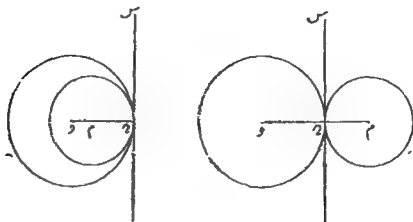
١٠ قطر الدائرة ينصف جميع الأوتار الموازية لأحد المماسين المرسومين من طرف هذا القطر

- ١١ المطلوب إيجاد المحل المنتمى لمراكز الدوائر التي تمس مستقيما معلوما في نقطة مفروضة عليه
- ١٢ المطلوب إيجاد المحل المنتمى لمراكز الدوائر التي تمس كلا من مستقيمين متوازيين غير محدودين
- ١٣ المطلوب إيجاد المحل المنتمى لمراكز الدوائر التي تمس كلا من مستقيمين متقاطعين غير محدودين
- ١٤ اذا رسم أى شكل رباعى خارج<sup>(١)</sup> دائرة فان مجموع كل ضلعين متقابلين يساوى مجموع الضلعين الآخرين أذكر عكس هذه النظرية وبرهن عليه
- ١٥ اذا رسم أى شكل رباعى خارج دائرة فان الزاويتين المركزيتين المقابلتين لضلعين متقابلين من أضلاع الشكل متكاملتان

(١) الشكل المرسوم خارج الدائرة ما كانت أضلاعه ماسة لمحيطها

## نظرية ٤٨

إذا تماس محيطا دائرتين كانت نقطة التماس على خط المراكزين



إذا فرضنا أن الدائرتين اللتين مركزيهما  $م$  و  $و$  متماستان في  $د$  فإنه يطلب إثبات أن هذه النقطة إحدى نقط المستقيم  $م$  و  $و$  لذلك نصل  $م$  و  $و$  و  $د$

البرهان — من حيث أن الدائرتين متماستان في  $د$  فلهما مماس مشترك في هذه النقطة (صفحة ١٩١) وليكن  $س$

ومن حيث أن كلا من نصفي القطرين  $م$  و  $و$  و  $د$  ماز بنقطة التماس

∴ كل من  $م$  و  $و$  و  $د$  عمود على  $س$

∴  $م$  و  $و$  و  $د$  على استقامة واحدة (نظرية ٢)

أي أن  $د$  على خط المراكزين وهو المطلوب

نتيجة ١ — إذا تماس دائرتان من الخارج فإن البعد بين مركزيهما يساوي مجموع نصفي القطرين

نتيجة ٢ — إذا تماس دائرتان من الداخل فإن البعد بين مركزيهما يساوي الفرق بين نصفي القطرين

## تمارين على الدوائر المتماسّة

(مسائل عديدة وتخطيطية)

١ ارسم دائرتين البعد بين مركزيهما  $٢$  و  $٣$  من السنتيمترات ونصف قطرا لأولى  $٤$  و  $٣$  من السنتيمترات والثانية  $١$  و  $٢$  من السنتيمترات . لـ  $ج$  يتماسان وأين نقطة تماسهما

وإذا كان البعد بين مركزي هاتين الدائرتين  $١$  و  $٢$  من السنتيمترات فبرهن على أنهما يتماسان وإذا ذكر الفرق بين هذه الحالة والحالة المتتمة

٢ ارسم المثلث  $abc$  الذى ضلعه  $a = 8$  سنتيمترات  $b = 6$   $c = 7$  سنتيمترات  $6 = c = 7$  سنتيمترات ثم ارسم دوائر أنصاف أقطارها على الترتيب  $2, 5, 6$  من السنتيمترات  $6, 5, 4$  من السنتيمترات وبرهن على أنها تماس متى  $2$

٣  $abc$  مثلث قائم الزاوية فى  $c$  ضلعه  $a = 8$  سنتيمترات  $b = 6$   $c = 7$  سنتيمترات ركر فى رأسه  $a$  ورسم دائرة نصف قطرها  $7$  سنتيمترات ماطول نصف قطر الدائرة التى مركزها  $b$  والتى يجب أن تماس الدائرة الأولى

٤  $abc$  مركزا دائرتين ثابتتين متاستين من الداخل  $6$   $c$  مركز أى دائرة أخرى تماس الدائرة الكبرى من الداخل والصغرى من الخارج برهن على أن  $a + b + c$  ثابت

وإذا كان نصف قطرى الدائرتين الثابتتين  $5$  سنتيمترات  $6$   $3$  سنتيمترات فانه يطلب تحقيق النامج بتغيير موضع المركز  $c$

٥  $abc$  مستقيم طوله  $4$  بوصات نصفناه فى  $c$  ورسمنا على كل من  $a$   $b$   $6$   $a$   $6$   $c$  نصف محيط دائرة بين أن نصف قطر الدائرة المحصورة بين ثلاثة أنصاف المحيطات ماسة كلامنها يجب أن يكون  $\frac{1}{2}$  البوصة

### (مسائل نظرية)

٦ إذا رسمنا مستقيما يمر بنقطة تماس دائرتين مركزاهما  $a$   $b$  ويقطع الأولى فى  $l$  والثانية فى  $c$  فبرهن على أن نصفى القطرين  $al$   $b$   $c$  متوازيان

٧ إذا رسم مستقيم يمر بنقطة تماس دائرتين متاستين من الخارج ويتهى بالمحيطين فبرهن على ان التماسين للدائرتين من طرفى المستقيم المذكور متوازيان

٨ المطلوب إيجاد المحل الهندسى لمراكز الدوائر

(أولاً) التى تماس دائرة معلومة فى نقطة معلومة

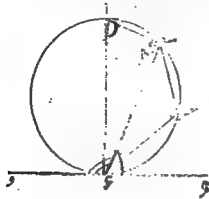
(ثانياً) التى نصف قطرها معلوم وتماس دائرة معلومة

٩ المطلوب رسم دائرة مركزها معلوم تماس دائرة معلومة كم حلا لهذه المسألة

١٠ المطلوب رسم دائرة نصف قطرها معلوم تماس دائرة أخرى معلومة فى نقطة مفروضة على محيطها كم حلا لهذه المسألة

### نظرية ٤٩

الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة ووترها المازية نقطة التماس والواقعة في احدى جهتي الوتر تساوي الزاوية المحيطية المرسومة على هذا الوتر في الجهة الأخرى منه



إذا فرضنا أن المستقيم هـ و مماس الدائرة بـ د ا في د و ب مرسوم فيها من نقطة التماس د فإنه يطلب إثبات أن

(أولاً) د هـ د ب = الزاوية المرسومة في القطعة د ا ب

(ثانياً) د و د ب = الزاوية المرسومة في القطعة د ح ب

نظم لذلك نرسم القطر د ا من قطعة د

ونفرض النقطة ح على قوس القطعة التي ليست فيها ا

ثم نصل ا ب ب د ح د ب د

البرهان — من حيث أن د ا ب د في نصف دائرة فهي قائمة

∴ مجموع الزاويتين د ا ب د ا ب = قائمة

لكن هـ د و مماس د ا قطر مازية نقطة التماس

∴ د هـ د ا قائمة

∴ د هـ د ا = مجموع الزاويتين د ا ب د ا ب

فلو طرحنا الزاوية المشتركة د ا ب

لكانت د هـ د ب = د ا ب المرسومة على الوتر في الجهة الأخرى

ومن حيث أن ا ب د د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

∴ د د ب د = المكلة لزاوية د ا ب

= المكلة لزاوية هـ د ب

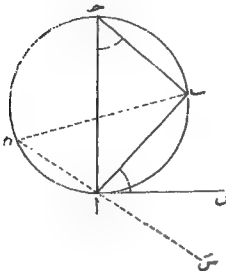
= د و د ب

∴ د و د ب = د د ب المرسومة على الوتر في الجهة الأخرى وهو المطلوب

### تمارين على نظرية ٤٩

- ١ في شكل نظرية ٤٩ اذا كانت  $د ه د = ٧٢$  فما مقدار كل من الزوايا  $ا ب$   $د ه د$   $ب د د$
- ٢ برهن بواسطة هذه النظرية على أن المماسين للائرة من نقطة معلومة خارجها متساويان
- ٣ دائرتان ممستانان في  $ا$  رسمنا مستقيمين يمران بها ويقطعان احدى الدائرتين في  $ل ٦ م$  والأخرى في  $س ٦ ص$  برهن على أن  $ل م$  يوازي  $س ص$  سواء كان التماس من الداخل أو من الخارج
- ٤  $ا ب$  وتر مشترك بين دائرتين تمر إحداهما بمركز الأخرى  $م$  برهن على أن  $ا م$  ينصف الزاوية المحصورة بين هذا الوتر المشترك والمماس للدائرة الأولى في  $ا$
- ٥ دائرتان متقاطعتان في  $ا ٦ ب$  فرض على إحداهما نقطة مامثل  $د$  ومد منها المستقيمان  $د ا ٦ د ب$
- ٦  $د ب$   $د$  نقطتا الدائرة الثانية في  $د ٦ ب$  برهن على أن  $د$  توازي مماس الدائرة الأولى في  $د$
- ٦ اذا رسمنا مماسا لدائرة ووترافيا مازا بنقطة التماس فبرهن على أن العمودين النازلين من منتصف أحد القوسين على المماس والوتر متساويان

### تمارين على طريقة نهاية الأوضاع



- ١ المطلوب البرهنة على نظرية ٤٩ بطريقة نهاية الأوضاع

نحرض أن  $ا ب$  قطعة دائرة وترها  $ا ب ٦ ا س$  مستقيم ما يقطع المحيط في  $د ٦ ا$  فاذا وصل  $د ب$  يثبت أن  $د ب = ا د ٦ ا$  (نظرية ٣٩) وهذه المتساوية حقيقية مهما اقتربت  $د$  من  $ا$  فاذا تحركت النقطة  $د$  حتى وقعت على  $ا$  صار القاطع  $د ا س$  مماسا للدائرة وانطبق على المماس  $ا س$  وتطبق  $د ب ٦ ا$  على  $د ب ا س$

ففي نهاية الأوضاع  $د ب ا س = ا د ب$  المرصومة في الجهة الأخرى من الوتر

- ٢ برهن من نظرية ٣١ بطريقة نهاية الأوضاع على أن العمود الملقام على قطر الدائرة من نهايته مماس لمحيطها
- ٣ استنتج نظرية ٤٨ من هذه الخاصة : خط ممكزي الدائرتين المتقاطعتين ينصف الوتر المشترك ويكون عمودا عليه
- ٤ استنتج نظرية ٤٩ من تمرين ٥ صفحة ١٨١
- ٥ استنتج نظرية ٤٦ من نظرية ٤١

## في الدعاوى العملية

### التحليل الهندسي .

الطريقة العامة التي اتبناها الى الآن في حل ماقتسم من الدعاوى مؤسسة على ما هو معروف بطريقة التركيب وهي ترتيب فروض الدعوى وتركيبها بحيث يمكن أن يستنبط منها ناتج يوصل الى الفرض المقصود

وهذه الطريقة وإن كانت في ذاتها منطقية لاكتشف في كثير من الأحوال الغطاء عن السبب الذي به يمكن الوصول الى رسم الحل أو إقامة البرهان على صحة الدعوى

وهناك سير آخر يؤدي البحث فيه غالباً الى الاهتداء الى طريقة لحل المسألة لاسيما اذا كانت من الدعاوى العملية

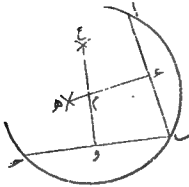
وهو مؤسس على الطريقة المعروفة بطريقة التحليل الهندسي وهي عكس طريقة التركيب المتقدمة الذكر

وذلك لأننا في طريقة التحليل نفرض أن المسألة محلولة وانما قد حصلنا على الناتج المقصود ونبحث عن الفروض التي عساها أن تكون متبعة لهذا الناتج ثم نتبع أصل كل فرض بأن نبحث عن كيفية استنباطه مما قبله وهكذا حتى نهدف في سيرنا على فرض أصيل في دعوى معينة وهذا في الغالب يشير الى طريق معرفة الحل . فنبدأ من الأصل الذي وقفنا عليه ونرجع في طريقنا على عكس الترتيب الذي اتبعناه وبذلك نسير على طريقة التركيب متبعين كل ناتج من فرض قبله وهكذا حتى نصل الى الناتج الأخير المقصود من الدعوى

وسنوضح حل بعض العمليات الآتية بطريقة التحليل (راجع عمليات ٢٣ و ٢٨ و ٢٩ )

### عملية ٢٠

المعلوم دائرة أو قوس منها والمطلوب إيجاد مركزها



نفرض أن  $AB$  قوس الدائرة المطلوب إيجاد مركزها  
العمل — نرمم وترين مثل  $AB$  و  $CD$  ونقيم من  
منتصفيهما العمودين  $DE$  و  $CF$  في تقاطعهم  $M$  (عملية ٢)  
فتكون هي المركز

البرهان — كل نقطة من قوس  $AB$  على بعدين متساويين  
من  $A$  و  $B$  (عملية ١٤)

وكذلك كل نقطة من قوس  $CD$  على بعدين متساويين

×

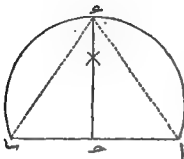
من  $C$  و  $D$

∴ نقطة تقاطعهم  $M$  على أبعاد متساوية من  $A$  و  $B$

∴  $M$  هي المركز (نظرية ٣٣) وهو المطلوب

### عملية ٢١

المطلوب تصنيف قوس معلوم



نفرض أن القوس المراد تصنيفه  $ACB$

العمل — نصل  $A$  و  $B$  ونقيم من منتصفه  $O$  العمود  $OC$  (عملية ٢)  
ونمدّه حتى يقابل القوس في نقطة  $D$  فتكون هي منتصف القوس

البرهان — نصل  $A$  و  $C$  و  $B$  و  $D$

فن حيث أن كل نقطة من قوس  $ACB$  على بعدين متساويين من  $A$  و  $B$  (عملية ١٤)

$$OA = OB \quad \therefore$$

$$OC = OD \quad \therefore \quad \angle AOC = \angle BOD \quad \therefore$$

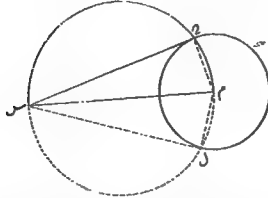
وعليه قوس الزاوية المحيطية  $ACB =$  قوس المحيطية  $ADB$

أي أن القوس  $ACB =$  القوس  $ADB$



### عملية ٢٢٠

المطلوب رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها



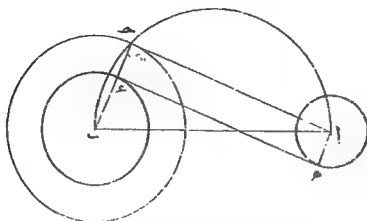
هـرض أن ل هـ الدائرة المعلومة وأن م مركزها م النقطه المفروضه خارجها  
العمل — نصل م س ونرسم عليه نصف المحيط م هـ م قاطعا الدائرة المعلومة في هـ  
ثم نصل المستقيم م هـ  
فيكون هو المماس المطلوب  
البرهان — نصل م هـ  
فتكون م هـ م س مرسومة في نصف دائرة فهي اذن قائمه  
∴ م هـ عمود على نصف القطر م هـ

(نظرية ٤٦)

وعليه فالمستقيم م هـ يمس الدائرة المعلومة في هـ  
ومن حيث انه يمكن رسم نصف محيط دائرة آخر على القطر م س يقطع محيط الدائرة المعلومة  
في نقطة أخرى مثل ل يمكن أيضا رسم مماس آخر م ل للدائرة المعلومة من النقطه المفروضه م  
تنبيه — اذا فرضنا أن النقطه م تقرب من الدائرة فان د هـ م ل تزداد شيئا فشيئا  
حتى اذا ما وقعت م على المحيط تصير الزاوية مستقيمة وينطبق المماسان كل على الآخر فاذا دخلت  
م في الدائرة استحال يد مماس منها (راجع الملاحظة في صفحة ٩٨)



(تابع) عملية ٢٣



إذا كانت الدائرتان متباعدتين في الخارج فإنه يمكن رسم مماسين آخرين غير المماسين المتقدمين كل منهما يجعل إحدى الدائرتين في جهة منه والدائرة الأخرى في الجهة الأخرى

التحليل - إذا فرضنا في هذه الحالة أن  $h$  و  $s$  اللاتريتين في  $h$  و  $s$  بحيث يقع  $ah$  في جهة من  $a$  ب  $6$  ب  $s$  في الجهة الأخرى  
حدث أن المستقيم  $ah$  الموازي للباس  $h$  و  $s$  يقابل امتداد  $s$  في  $c$   
وأن  $b = c + s$  و  $c = b + 1$   
ولكن  $د ا ح ب$  قائمة كما ختم

## نستنتج ما يأتي

العمل — ترك في ب ونصف قطريساوي مجموع نصفى القطرى البائزين المعلومتين نرسم دائرة  
ثم عند ا مماسا لها ونجربى مأخرياته في الحالة المتقدمه الا أننا نرسم ا هـ في اتجاه مضاد لاتجاه  
المستقيم ب د

ملاحظة - من حيث انه يمكن مد مجاسين من النقطة ١ الى الدائرة التي رسمناها للتوصل بها الى الحل كما في الحالة المتقدمة فانه يمكن كذلك رسم مجاسين مشتركين للدائرتين المعلومتين ويقال لهما مجاسان من الداخل

[هذا ويترك للطالب ترتيب حل هذه المسألة على طريقة التركيب]

## تمارين على المسامات المشتركة

(مسائل عديدة وتخطيطية)

١ كم مماسا مشتركا يمكن أن ترسم في كل من الأحوال الآتية

(أولا) اذا تقاطع محيطا دائرتين

(ثانيا) اذا تماسا من الخارج

(ثالثا) اذا تماسا من الداخل

وضع الإجابة برسم دائرتين نصف قطرها ٣,٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٢,٥ من السنتيمترات بحيث يكون البعد بين المركزين يساوى

(أولا) ٢,٥ من السنتيمترات

(ثانيا) ٦ سنتيمترات

(ثالثا) ١ سنتيمترا

(رابعا) ٧,٥ من السنتيمترات

ثم ارسم المسامات المشتركة في كل حالة وبين في أى الحالات لا يمكن اتباع الطريقة العاقبة في رسم هذه المسامات أو إمكان اتباعها مع التعديل

٢ ارسم دائرتين نصف قطرها ٤ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى ١,٦ من السنتيمترات بحيث يكون البعد بين مركزيهما ٤ سنتيمترات وارسم المسامات المشتركة واستخرج أطوالها ثم قسمها

٣ ارسم جميع المسامات المشتركة لدائرتين مركزيهما متباعداً بقدر ٤ من السنتيمترات ونصف قطر إحداهما ١,٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٣ سنتيمترات واستخرج طول كل من المماسين الخارجيين بالحساب والقياس

٤ دائرتان نصف قطرها ٣,٤ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى سنتيمتران والبعد بين مركزيهما ٤,٢ من السنتيمترات والمطلوب (أولا) رسم المسامات المشتركة (ثانيا) إيجاد أطوالها (ثالثا) إيجاد طول الوتر المشترك (رابعا) مد الوتر المشترك على استقامته وبين أنه ينصف هذه المسامات بالقياس

٥ دائرتان نصف قطرها ٣,٢ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ١,٦ من السنتيمترات والبعد بين مركزيهما ٦ سنتيمترات والمطلوب رسم جميع المسامات المشتركة لها

٦ المطلوب رسم المماسين المشتركين الخارجيين لدائرتين متساويتين

(مسائل نظرية)

٧ إذا رسمنا مماسين مشتركين للدائرتين فإن جزأيهما المحصورين بين نقطتي التماس متساويان سواء كان المماسان خارجيين أو داخليين

٨ إذا رسمنا مماسين خارجيين ومماسين داخليين للدائرتين متباعدتين في الخارج فإن المماسين الداخليين يتقاطعان في نقطة على خط المراكز وكذلك المماسان الخارجيان إذا امتدّا

٩ دائرتان متماسكتان من الخارج في نقطة ١ رسم مماس مشترك بهما في نقطتي ٢ و ٣ و ٤ برهن على أن المستقيم ٥ و ٦ يقابل زاوية قائمة رأسها في ١

### في رسم الدوائر

لإمكان رسم الدائرة يجب تعيين

(أولاً) مركزها

(ثانياً) طول نصف قطرها

ولتعيين المركز يجب أن يتوفر شرطان يتعين بكل منهما حل هندسي يكون مركز الدائرة إحدى نقطه نقطتة تقاطع هذين الحلين تعيين وضع المركز (كما تبين ذلك في صفحة ٩٨)

ولتعيين طول نصف القطر يجب أن تبين أى نقطة أخرى من نقط محيط الدائرة بعد تعيين المركز وعلى ذلك يمكن رسم الدائرة متى علمت ثلاثة فروض مطلقة

فمثلاً يمكن رسم الدائرة متى علم

(أولاً) ثلاث نقط من نقط المحيط

(ثانياً) أوضاع ثلاثة مماسات

(ثالثاً) نقطة من نقط المحيط ومماس ونقطة التماس التي عليه

وقد يمكن رسم أكثر من دائرة تستوفي الشروط الثلاثة المفروضة

وعلى الطالب قبل حل التمارين الآتية أن يتنبه إلى معرفة المحلل الهندسية الآتية بيانها

(أولاً) المحلل الهندسي لمراكز الدوائر المارة بنقطتين معلومتين

(ثانياً) المحلل الهندسي لمراكز الدوائر التي تمس مستقيماً معلوماً في نقطة مفروضة عليه

(ثالثاً) المحلل الهندسي لمراكز الدوائر التي تمس دائرة معلومة في نقطة مفروضة عليها

(رابعاً) المحلل الهندسي لمراكز الدوائر المعلوم نصف قطرها والتي تمس مستقيماً معلوماً

(خامساً) المحلل الهندسي لمراكز الدوائر المعلوم نصف قطرها والتي تمس دائرة معلومة

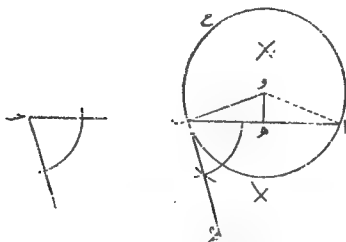
(سادساً) المحلل الهندسي لمراكز الدوائر التي تمس مستقيمين معلومين

## تمارين

- ١ ارسم دائرة تمر بثلاث نقط معلومة
- ٢ اذا رسمت دائرة تمس مستقيما معلوما وليكن ل د في ب فعلى أى مستقيم يكون مركزها واذا مرّت دائرة بالنقطتين المعلومتين ا ب فعلى أى مستقيم يكون مركزها
- اذا علم هذا فانه يطلب رسم دائرة تمس مستقيما معلوما مثل ل د في نقطة ب وتمر بنقطة أخرى مثل ا
- ٣ اذا رسمت دائرة تمس دائرة معلومة مركزها م في نقطة ا فعلى أى خط يكون مركز هذه الدائرة
- ارسم دائرة تمس الدائرة المعلومة م في ا وتمر بنقطة أخرى ب
- ٤ النقطة د تبعد عن المستقيم ا ب بقدر ٥ر٤ من السنتيمترات والمطلوب رسم دائرتين نصف قطر كل منهما ٣ر٢ من السنتيمترات تمان بالنقطة د وتمسان المستقيم ا ب
- ٥ دائرتان نصف قطر إحداهما ٣ سنتيمترات ونصف قطر الأخرى سنتيمتران والبعد بين مركزيهما ٦ سنتيمترات والمطلوب رسم دائرة نصف قطرها ٣ر٥ من السنتيمترات تمس كلا من الدائرتين المعلومتين من الخارج
- كم حلا لهذه المسئلة وما طول نصف قطر أصغر دائرة تمس الدائرتين المعلومتين من الخارج
- ٦ اذا مس محيط دائرة المستقيمين ا ب م ب فعلى أى مستقيم يكون مركزها
- ارسم ا ب م ب بحيث يحصران بينهما زاوية مقدارها ٧٦° وارسم دائرة نصف قطرها ٣ر٢ من السنتيمترات تمس كلا من هذين المستقيمين
- ٧ دائرة نصف قطرها ٣ر٥ من السنتيمترات وبعد مركزها عن المستقيم المعلوم ا ب يساوى ٥ سنتيمترات والمطلوب رسم دائرتين نصف قطر كل منهما ٣ر٥ من السنتيمترات بحيث تمسان الدائرة المعلومة والمستقيم ا ب
- ٨ كيف ترسم دائرة تمس كلا من مستقيمين متوازيين وقاطع لهما
- برهن على أنه يمكن رسم دائرتين متساويتين من هذا القبيل
- ٩ ارسم دائرة تمس دائرة أخرى معلومة ومستقيما معلوما في نقطة مفروضة عليه
- ١٠ ارسم دائرة تمس مستقيما معلوما ودائرة أخرى معلومة في نقطة مفروضة على محيطها
- ١١ كيف ترسم دائرة تمس كلا من ثلاثة مستقيما معلومة لا يتوازي منها اثنان . كم دائرة يمكن رسمها من هذا القبيل

## عملية ٢٤

المطلوب رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة



إذا فرضنا أن  $AB$  هو المستقيم المعلوم وأن  $\angle P$  هي الزاوية المعلومه

فانه يطلب رسم قطعة دائرة على  $AB$  تقبل زاوية تساوى  $\angle P$

العمل - نرسم من  $B$  المستقيم  $BC$  يصنع زاوية مع المستقيم  $AB$  تساوى  $\angle P$  ونقيم من  $B$  العمود  $BD$  على  $BC$

ثم ن نصف  $AB$  في  $H$  ونقيم منها العمود  $HE$  على  $AB$  ونمده حتى يقابل  $D$  في نقطة  $(E)$  البرهان - نصل  $AE$

فمن حيث أن كل نقطة من قطع  $HE$  على  $BD$  متساويين من  $A$  و  $B$   $\therefore EA = EB$

فلذا مركزنا في  $E$  ورسمنا دائرة بنصف قطر يساوى  $EB$  فانها تمر بنقطة  $A$  ونحس  $BC$  في  $B$  (نظرية ٤٦) وعليه فالقطعة  $AE$   $B$  مرسومة على  $AB$  في الجهة المقابلة للتي فيها زاوية  $AB$

فاى زاوية مرسومة في القطعة  $AE$   $B$  يجب أن تساوى  $\angle P$  (نظرية ٤٩) أى أن القطعة  $AE$   $B$  تقبل الزاوية المعلومه

نتبيه - اذا كانت الزاوية المعلومه قائمه فالقطعة التي قبلها نصف دائرة قطرها المستقيم المعلوم  $AB$  (نظرية ٤١) نتيجة - اذا أريد فصل قطعة من دائرة تقبل زاوية معلومة يكنى أن نمده مماسا لهذه الدائرة ونرسم من نقطة التماس وتر فيها يصنع مع المماس المذكور زاوية تساوى الزاوية المعلومه

وقد سبق في (صفحة ١٧٩) البرهنة على أن:

المحل الهندسى لرؤوس المثلثات المرسومة على قاعدة واحدة وزوايا رؤوسها تساوى زاوية معلومة هو قوس القطعة المرسومة على هذه القاعدة والتي تقبل الزاوية المعلومه

وبواسطة هذه العملية وباستعمال طريقة تقاطع المحال الهندسية المتوه عنها في صفحة ٩٨ يمكن حل المسائل العملية الآتية

## تمارين

١ المطلوب رسم مثلث على قاعدة معلومة رأسه على مستقيم معلوم وزاوية رأسه تساوى زاوية معلومة

٢ المطلوب رسم المثلث اذا علمت منه القاعدة وزاوية الرأس وأحد القروض الآتية

(أولاً) ضلع غير القاعدة

(ثانياً) الارتفاع

(ثالثاً) طول المستقيم المتوسط المنصف للقاعدة

(رابعاً) موقع العمود النازل من الرأس على القاعدة

٣ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس ونقطة تقابل منتصف زاوية الرأس بهذه القاعدة

[فرض أن  $AB$  القاعدة  $C$  من النقطة المفروضة عليها  $C$  الزاوية المعلومة فترسم على  $AB$  قطعة دائرة تقبل  $C$  ثم تكمل البائرة برسم القوس  $A$   $B$  وتنصفه في  $D$  ثم نصل  $CD$  ونمده على استقامته حتى يقابل المحيط في  $E$  فيكون  $ABE$  هو المثلث المطلوب]

٤ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس ومجموع الضلعين الآخرين

[فرض أن  $AB$  القاعدة  $C$  الزاوية المعلومة  $P$  مستقيم مساو لمجموع الضلعين ونرسم على  $AB$  قطعتي دائرتين إحداهما تقبل زاوية  $= D$  والثانية تقبل زاوية  $=$  نصف  $D$  ثم نركز في  $A$  ونصنف قطريساوى  $P$  نرسم دائرة تقطع قوس القطعة الثانية في  $C$  ثم نصل  $AC$  ( $أو$   $ص$ ) فيقطع قوس القطعة الأولى في  $E$  ويكون  $ABE$  هو المثلث المطلوب]

٥ المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس والفرق بين الضلعين الآخرين



## الدائرة والأشكال المستقيمة الأضلاع

### تعريف

١ كثير الأضلاع شكل مستقيم الأضلاع محدود بأكثر من أربعة مستقيمت  
ويسمى خمسا إذا كانت أضلاعه خمسة

» مستمعا » » » ستة

» مسبعا » » » سبعة

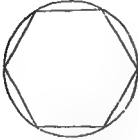
» مئثنا » » » ثمانية

» معشرا » » » عشرة

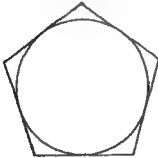
» ذا الاثنى عشر ضلعا » » » اثنا عشر

» ذا الخمسة عشر ضلعا » » » خمسة عشر وهكذا

٢ كثير الأضلاع أو المضلع المنتظم ما كانت أضلاعه متساوية  
وزواياه كذلك



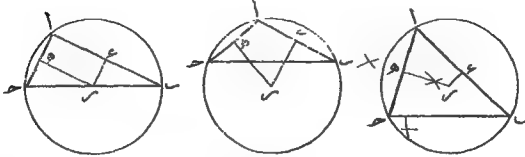
٣ يقال ان الشكل المستقيم الأضلاع مرسوم داخل دائرة متى  
كانت جميع رؤوسه على محيطها ويقال ان الدائرة مرسومة خارج أى  
شكل مستقيم الأضلاع أو عليه متى مرّ محيطها برؤوسه



٤ يقال ان الدائرة مرسومة داخل الشكل المستقيم الأضلاع متى  
كان كل ضلع من أضلاعه يمس محيطها وفي هذه الحالة يقال ان  
هذا الشكل مرسوم خارج الدائرة

## عملية ٢٥

المطلوب رسم دائرة خارج مثلث معلوم

نفرض أن  $\triangle ABC$  المثلث المطلوب رسم دائرة خارجة

العمل — نقيم على  $AB$  من منتصفه العمود  $z$  وعلى  $AC$  من منتصفه العمود  $هـ$  فيتقاطعان في  $س$  (عملية ٢)

فتكون  $س$  هي المركز

البرهان — من حيث أن كل نقطة من نقط  $ز$  و  $هـ$  على بعدين متساويين من  $A$  و  $B$  (عملية ١٤) وكذلك كل نقطة من نقط  $هـ$  و  $س$  على بعدين متساويين من  $A$  و  $C$   $\therefore$  على أبعاد متساوية من  $A$  و  $B$  و  $C$ .

فاذا ركبنا في  $س$  ورسم محيط دائرة بنصف قطر يساوي  $س$  فإنه يمر بالنقطتين  $B$  و  $C$  ويكون هو المحيط المطلوب

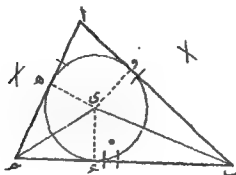
ملاحظة — نرى أنه إذا كان المثلث حاد الزوايا فإن مركز الدائرة يقع داخله وإذا كان قائم الزاوية يقع المركز على وتر المثلث وإذا كان منفرج الزاوية يقع المركز خارجا عنه

تنبيه — يؤخذ مما تقدم في (صفحة ٩٨) أنه إذا وصلنا النقطة  $س$  بمنتصف  $BC$  كان المستقيم الواصل عمودا على  $BC$

وعليه فالأعمدة الثلاثة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها تتلاقى جميعا في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث

## عملية ٢٦

المطلوب رسم دائرة داخل مثلث معلوم

نفرض أن  $ا ب ج$  المثلث المراد رسم الدائرة داخله

العمل - نصف كل من  $ا ب ج$   $ا ب ج$  بالمستقيمين  $ب ي$   $ج ي$  المتقاطعين في  $ي$   
(عملية ١)

فتكون  $ي$  مركز الدائرة

البرهان - ننزل من  $ي$  الأعمدة  $ي د$   $ي هـ$   $ي ز$  وعلى أضلاع المثلث فكل نقطة من نقط  $ب ي$  على بعدين متساويين عن  $ب ج ا$   
(عملية ١٥)

$$\therefore ي د = ي هـ$$

وكذلك كل نقطة من نقط  $ج ي$  على بعدين متساويين عن  $ج ب ا$ 

$$\therefore ي د = ي هـ$$

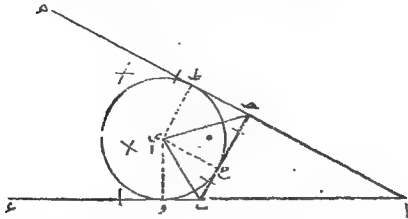
$$\therefore ي د = ي هـ = ي ز$$

فإننا ركنا في  $ي$  وب نصف قطريساوي أحدها  $ي د$  رسمنا دائرة فإن محيطها يمر بالنقطتين الآخرين  $هـ د$  وبمس الأضلاع  $ب ج ا ب ج ا$  لأن الزوايا في  $د هـ د$  قوائم  
أي أن الدائرة  $د هـ و$  مرسومة داخل المثلث

تنبه - يؤخذ ما تقدم (في ٢ صفحة ١٠١) أنه إذا وصلنا  $ا ي$  كأن منصف زاوية  $ب ا ج$  وعلى ذلك  
فنصفات زوايا المثلث تتلاقى جميعا في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المرسومة داخله  
تعريف - الدائرة التي تمس المثلث من الخارج هي مامس محيطها أحد أضلاع المثلث وامتداد  
الضلعين الآخرين

عملية ٢٧

المطلوب رسم دائرة تمس المثلث من الخارج



إذا فرضنا أن  $ABC$  المثلث ومددنا الضلع  $AB$  إلى  $D$  والضلع  $AC$  إلى  $E$  فإنه يطلب رسم الدائرة التي تمس  $BC$  وامتداد الضلعين  $AB$  و  $AC$

العمل - ن نصف الزاويتين  $C$  و  $B$  بـ  $D$  و  $E$  بالمستقيمين  $BD$  و  $CE$  فيتقاطعان في  $O$  فتكون  $O$  مركز الدائرة المطلوبة

البرهان - نزل من  $O$  الأعمدة  $OD$  و  $OE$  على  $AD$  و  $AE$  و  $OF$  على  $BC$  ومن حيث أن كل نقطة من نقط  $OD$  و  $OE$  على بعدين متساويين من  $B$  و  $C$  (عملية ١٥)

$$\therefore OD = OE$$

$$\text{وكذلك } OE = OF$$

$$\therefore OD = OE = OF$$

فاذا ركنا في  $O$  وبنصف قطر يساوي  $OD$  و رسمنا محيط دائرة فإنه يمر بالنقطتين  $D$  و  $E$  و  $F$  و  $B$  و  $C$  و  $A$  لأن الزوايا في  $D$  و  $E$  و  $F$  قوائم

$\therefore D$  و  $E$  و  $F$  هي الدائرة التي تمس المثلث من الخارج

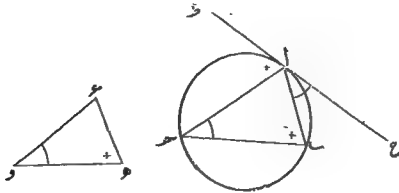
نتيجه ١ - يؤخذ مما تقدم أنه يمكن رسم ثلاث دوائر كل منها تمس المثلث من الخارج

نتيجه ٢ - يؤخذ مما تقدم (في ٢ صفحة ١٠١) أنه إذا وصلنا  $A$  و  $B$  كان منصف الزاوية  $A$  و على ذلك

فنصف الزاويتين الخارجيتين للمثلث ومنصف الثلاثة الداخلة تتلاقى جميعا في نقطة واحدة هي مركز الدائرة التي تمس أضلاع المثلث من الخارج

عملية ٢٨

المطلوب رسم مثلث داخل دائرة معلومة زواياه تساوي زوايا مثلث آخر معلوم



فرض أن  $ا ب ح$  الدائرة المعلومة  $ك د ه$  و المثلث المعلوم  
التحليل - نفرض أن المسألة محلولة وأن  $ا ب ح$  المثلث المطلوب فإذا أمكن من قطعة ما على  
المحيط مثل  $ا$  رسم الوترين  $ا ب$   $ا ح$  بحيث إذا وصل  $ب ح$  تكون

$$\angle د = \angle ه \quad \angle ح = \angle د$$

حدث أن  $\angle د = \angle ا$   $\angle ح = \angle ا$  (نظرية ١٦)  
وبالتأمل نرى أن  $\angle د$  المرسومة في القطعة  $ا ب$  تين مساويتها المحصورة بين الوتر  $ا ح$  والمماس  
الدائرة في نقطة  $ا$  (نظرية ٤٩)

فإذا رسمنا إذن من  $ا$  المماس  $ع ا ط$  حدث أن  $\angle ط ا ح = \angle د = \angle ه$   
وكذلك  $\angle ح ا ب = \angle د$

فإذا اتبعنا عكس هذا السير نصل إلى العمل الآتي

العمل - نفرض نقطة ما مثل  $ا$  على المحيط  $ا ب ح$  ونرسم المماس  $ع ا ط$  (عملية ٢٢)  
ونمد من نقطة  $ا$  الوتر  $ا ح$  بحيث يصنع مع المماس  $ا ط$  الزاوية  $ط ا ح$  تساوي  $\angle ه$   
ونمد من نقطة  $ا$  الوتر  $ا ب$  بحيث يصنع مع  $ا ح$  الزاوية  $ح ا ب$  تساوي  $\angle د$

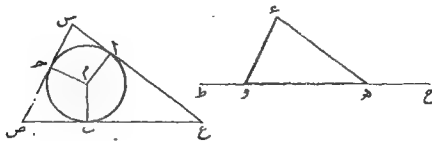
ثم نصل  $ب ح$

فيكون  $ا ب ح$  المثلث المطلوب

تنبيه - يجدر بالتلميذ أن يرسم شكل هذه العملية واثق بعدها تكبرا ويبين فيه الخطوط اللازمة لرسم المماس  $ع ا ط$   
وكذلك الخطوط اللازمة لرسم الزاويتين  $ط ا ح$   $ح ا ب$

عملية ٢٩

المطلوب رسم مثلث خارج دائرة معلومة زواياه تساوي زوايا مثلث آخر معلوم



فترض أن  $a$   $b$   $c$   $d$   $e$   $f$   $g$   $h$   $i$   $j$   $k$   $l$   $m$   $n$   $o$   $p$   $q$   $r$   $s$   $t$   $u$   $v$   $w$   $x$   $y$   $z$   $aa$   $ab$   $ac$   $ad$   $ae$   $af$   $ag$   $ah$   $ai$   $aj$   $ak$   $al$   $am$   $an$   $ao$   $ap$   $aq$   $ar$   $as$   $at$   $au$   $av$   $aw$   $ax$   $ay$   $az$   $ba$   $bb$   $bc$   $bd$   $be$   $bf$   $bg$   $bh$   $bi$   $bj$   $bk$   $bl$   $bm$   $bn$   $bo$   $bp$   $bq$   $br$   $bs$   $bt$   $bu$   $bv$   $bw$   $bx$   $by$   $bz$   $ca$   $cb$   $cc$   $cd$   $ce$   $cf$   $cg$   $ch$   $ci$   $cj$   $ck$   $cl$   $cm$   $cn$   $co$   $cp$   $cq$   $cr$   $cs$   $ct$   $cu$   $cv$   $cw$   $cx$   $cy$   $cz$   $da$   $db$   $dc$   $dd$   $de$   $df$   $dg$   $dh$   $di$   $dj$   $dk$   $dl$   $dm$   $dn$   $do$   $dp$   $dq$   $dr$   $ds$   $dt$   $du$   $dv$   $dw$   $dx$   $dy$   $dz$   $ea$   $eb$   $ec$   $ed$   $ee$   $ef$   $eg$   $eh$   $ei$   $ej$   $ek$   $el$   $em$   $en$   $eo$   $ep$   $eq$   $er$   $es$   $et$   $eu$   $ev$   $ew$   $ex$   $ey$   $ez$   $fa$   $fb$   $fc$   $fd$   $fe$   $ff$   $fg$   $fh$   $fi$   $fj$   $fk$   $fl$   $fm$   $fn$   $fo$   $fp$   $fq$   $fr$   $fs$   $ft$   $fu$   $fv$   $fw$   $fx$   $fy$   $fz$   $ga$   $gb$   $gc$   $gd$   $ge$   $gf$   $gg$   $gh$   $gi$   $gj$   $gk$   $gl$   $gm$   $gn$   $go$   $gp$   $gq$   $gr$   $gs$   $gt$   $gu$   $gv$   $gw$   $gx$   $gy$   $gz$   $ha$   $hb$   $hc$   $hd$   $he$   $hf$   $hg$   $hh$   $hi$   $hj$   $hk$   $hl$   $hm$   $hn$   $ho$   $hp$   $hq$   $hr$   $hs$   $ht$   $hu$   $hv$   $hw$   $hx$   $hy$   $hz$   $ia$   $ib$   $ic$   $id$   $ie$   $if$   $ig$   $ih$   $ii$   $ij$   $ik$   $il$   $im$   $in$   $io$   $ip$   $iq$   $ir$   $is$   $it$   $iu$   $iv$   $iw$   $ix$   $iy$   $iz$   $ja$   $jb$   $jc$   $jd$   $je$   $jf$   $jj$   $jh$   $ji$   $jj$   $jk$   $jl$   $jm$   $jn$   $jo$   $jp$   $jq$   $jr$   $js$   $jt$   $ju$   $jv$   $jw$   $jx$   $ji$   $jj$   $jk$   $jl$   $jm$   $jn$   $jo$   $jp$   $jq$   $jr$   $js$   $jt$   $ju$   $jv$   $jw$   $jx$   $iy$   $iz$   $ka$   $kb$   $kc$   $kd$   $ke$   $kf$   $kg$   $kh$   $ki$   $kj$   $kl$   $km$   $kn$   $ko$   $kp$   $kq$   $kr$   $ks$   $kt$   $ku$   $kv$   $kw$   $kx$   $ky$   $kz$   $la$   $lb$   $lc$   $ld$   $le$   $lf$   $lg$   $lh$   $li$   $lj$   $lk$   $ll$   $lm$   $ln$   $lo$   $lp$   $lq$   $lr$   $ls$   $lt$   $lu$   $lv$   $lw$   $lx$   $ly$   $lz$   $ma$   $mb$   $mc$   $md$   $me$   $mf$   $mg$   $mh$   $mi$   $mj$   $mk$   $ml$   $mm$   $mn$   $mo$   $mp$   $mq$   $mr$   $ms$   $mt$   $mu$   $mv$   $mw$   $mx$   $my$   $mz$   $na$   $nb$   $nc$   $nd$   $ne$   $nf$   $ng$   $nh$   $ni$   $nj$   $nk$   $nl$   $nm$   $nn$   $no$   $np$   $nq$   $nr$   $ns$   $nt$   $nu$   $nv$   $nw$   $nx$   $ny$   $nz$   $oa$   $ob$   $oc$   $od$   $oe$   $of$   $og$   $oh$   $oi$   $oj$   $ok$   $ol$   $om$   $on$   $oo$   $op$   $oq$   $or$   $os$   $ot$   $ou$   $ov$   $ow$   $ox$   $oy$   $oz$   $pa$   $pb$   $pc$   $pd$   $pe$   $pf$   $pg$   $ph$   $pi$   $pj$   $pk$   $pl$   $pm$   $pn$   $po$   $pp$   $pq$   $pr$   $ps$   $pt$   $pu$   $pv$   $pw$   $px$   $py$   $pz$   $qa$   $qb$   $qc$   $qd$   $qe$   $qf$   $qg$   $qh$   $qi$   $qj$   $qk$   $ql$   $qm$   $qn$   $qo$   $qp$   $qq$   $qr$   $qs$   $qt$   $qu$   $qv$   $qw$   $qx$   $qy$   $qz$   $ra$   $rb$   $rc$   $rd$   $re$   $rf$   $rg$   $rh$   $ri$   $rj$   $rk$   $rl$   $rm$   $rn$   $ro$   $rp$   $rq$   $rr$   $rs$   $rt$   $ru$   $rv$   $rw$   $rx$   $ry$   $rz$   $sa$   $sb$   $sc$   $sd$   $se$   $sf$   $sg$   $sh$   $si$   $sj$   $sk$   $sl$   $sm$   $sn$   $so$   $sp$   $sq$   $sr$   $ss$   $st$   $su$   $sv$   $sw$   $sx$   $sy$   $sz$   $ta$   $tb$   $tc$   $td$   $te$   $tf$   $tg$   $th$   $ti$   $tj$   $tk$   $tl$   $tm$   $tn$   $to$   $tp$   $tq$   $tr$   $ts$   $tt$   $tu$   $tv$   $tw$   $tx$   $ty$   $tz$   $ua$   $ub$   $uc$   $ud$   $ue$   $uf$   $ug$   $uh$   $ui$   $uj$   $uk$   $ul$   $um$   $un$   $uo$   $up$   $uq$   $ur$   $us$   $ut$   $uu$   $uv$   $uw$   $ux$   $$

وجيلتذ يتبع أن دس = دء  
 فلذا فرضنا أن م مركز الدائرة ووصلنا بين المركز ونقط التماس ١ ٦ ب ٦ ح كانت المستقيمت  
 ١ ٦ م ٦ ب ٦ ح = أنصاف أقطار عمودية على أضلاع المثلث لأن كلا من هذه الأضلاع مماس للدائرة  
 فلذا علمت اذن أوضاع أنصاف الأقطار المذكورة أمكن رسم المساسات وتعلم أوضاعها بتعيين  
 مقدار كل من الزاويتين ١ م ب ٦ ٦ م ح  
 ومن حيث انه في الشكل الرابع ١ م ح

$$v_2 = 1\Delta + 0\Delta$$

$$A - I_n = C - I_n = 0 \quad \therefore$$

وذلك  $د ب م = ١٨٠^\circ - د ب ص = ١٨٠^\circ - د$

ومن ذلك نستنتج الطريقة الآتية لحل العملية  
العمل -- نحدد  $u$  و  $v$  على استقامته في كل من جهتيه الى  $z$  و  $6$  ط ثم نعين مركز الدائرة  $ab$  حولين  $m$   
ثم نرسم نصف قطرها مثل  $m$

وزن من م نصف القطر م ا بحيث تكون د ب م ا = د د ه ح

ثُمَّ نَزَعْنَا مِنْ لَدُنْهُمْ أَجْرَهُمْ فَأُولَٰئِكَ أَصْحَابُ الْأُحْطَارِ

وتقيم على أنصاف الأقطار أعمدة من النقط  $a$  و  $b$  و  $c$  تتقابل متى في  $s$  و  $e$  و  $v$

∴ من ع ص هو المثلث المطلوب

( وترك للتليد الزهرة على هذه العملية بطريقة التركيب

### تمارين على الدوائر والمثلثات

١ المعلوم دائرة نصف قطرها ه متساويات والمطلوب رسم مثلث متساوي الأضلاع داخلها وأخر خارجها أذكر في كل من الحالتين الحل العمل، وبرهن عليه

٢ المطلوب رسم مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٨ سنتيمترات وحساب طول نصف قطر كل من الدوائر المرسومة داخله والمرسومة خارجه والتي تمس أضلاعه من الخارج وقياس كل إلى أقرب مليمتر  
 بين السبب في أن نصف قطر الدائرة الثانية ضعف نصف قطر الأولى ونصف قطر الثالثة ثلاثة أمثاله

٣ المطلوب رسم مثلثات من القروض الآتية

(أولاً)  $6 = 5$  مستقيمات  $6 = 6$   $6 = 6$   $6 = 6$

٥٤٤ = ٢٦ ٥٧٢ = ٣٦ ، ٥ = ٦ (ثانياً)

(ثالثاً)  $0 = 1$  ,  $6^{\circ} 41 = 6$  ,  $6^{\circ} 23 = 6$

ارسم دائرة خارج كل مثلث وقس نصف قطرها الى أقرب مليمترين السبب في أن النتائج الثلاثة متشابهة أن تقارن الزوايا الرأسية للثلثات

4 ارسم مثلثا متساوي الأضلاع داخل دائرة نصف قطرها 4 مستقيمتات واحسب طول ضلعه الى أقرب ملمتر وحقق ذلك بالقاس

ثم أوجد مساحة هذا المثلث و برهن على أنها تساوى ربع مساحة المثلث المتساوى الأضلاع المرسوم خارج الدائرة المذكورة

إذا كانت  $y$  مركز الدائرة المرسومة داخل  $\triangle ABC$  نصف قطر هذه الدائرة

فِيْن اُن . . ا ه ي ن م =  $\frac{1}{4}$  ٦ ه

$$u \cup \frac{1}{v} = 1 \quad \Delta \quad 6$$

$$u \cdot \frac{1}{y} = u \cdot 1 \quad \Delta \quad 6$$

وبنا بزمین علی أن  $\Delta \text{ ا ب } = \frac{1}{4} (1 + 1 + 1) = \frac{3}{4}$

ثم حقق هذا القانون بأخذ المقاسات اللازمة في المثلث الذي أطوال أضلاعه ٩ سنتيمترات  
٦ ٨ سنتيمترات ٦ ٧ سنتيمترات

٦. برهن على أنه إذا فرض أن  $\frac{1}{2}$  نصف قطر الدائرة التي تمس المثلث من الخارج والتي تقابل  $a$  بحيث أن  $\Delta a = \frac{1}{2}(b+c-a)$ .

ثم حقق هذا الناتج بالقياس على فرض أن  $٦ = ٥$  مستقيمرات و  $٧ = ٤$  مستقيمرات و  $٨ = ٣$  مستقيمرات

٧ ا ب ا مثلث فيه  $\angle 1 = 63^\circ$  من السنتيمترات  $\angle 6 = 3^\circ$  سنتيمترات  $\angle 5 = 91^\circ$  من

الستيمترات والمطلوب قياس نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث وإزالة الأعمدة من ١ ٦ ٦ ح على الأضلاع المقابلة لها وقياسها فإذا رُمز لأطوال هذه الأعمدة بالرموز ع ٦ ع ٦ ع ي بحث أن نصف

قطر الدائرة الخارجة =  $\frac{a \times b}{c} = \frac{b \times c}{a} = \frac{c \times a}{b}$

## تمارين على الدوائر والمربعات

- ١ ارسم دائرة نصف قطرها ٣ سنتيمترات وأوجد طريقة عملية لرسم مربع داخلها واحسب طول ضلعه الى اقرب مليمتروحقق ذلك بالقياس ثم أوجد مساحة هذا المربع
- ٢ المطلوب رسم مربع خارج دائرة نصف قطرها ٣ سنتيمترات وبيان جميع الخطوط اللازمة للحل والبرهنة على أن مساحة المربع المرسوم خارج الدائرة ضعف مساحة المربع المرسوم داخلها
- ٣ ارسم مربعا طول ضلعه ٧,٥ من السنتيمترات واذا كررنا عمليا لرسم دائرة داخله وبرهن عليه بواسطة القائل
- ٤ ارسم دائرة خارج مربع طول ضلعه ٦ سنتيمترات ثم قس قطرها لأقرب مليمتروحقق ذلك بالحساب
- ٥ ارسم مستطيلا طول أحد أضلاعه ٧,٥ من السنتيمترات في دائرة نصف قطرها ٥,٤ من السنتيمترات وأوجد طول الضلع الثاني بالتقريب
- ثم برهن على أن مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة أكبر من مساحة أى مستطيل يرم داخلها
- ٦ اذا رسمنا مربعا ومثلثا متساوي الأضلاع داخل دائرة ورمزنا بالضلع المربع بالحرف  $\Gamma$  والضلع المثلث بالحرف  $\Delta$  كان

$$13 = 2\Delta$$

- ٧ ا ب د ه مربع مرسوم داخل دائرة ٦ ه نقطة على القوس ا د برهن على أن د ه التي يقابلها ا د ثلاثة امثال الزاوية التي رأسها في ه ويقابلها اى ضلع آخر

(مسائل عملية)

أذكر الحل العملي والبرهان النظري

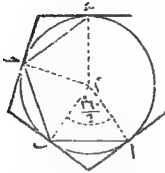
- ٨ ارسم معيننا خارج دائرة معلومة
- ٩ ارسم مربعا داخل المربع ا ب د ه بحيث يكون أحد رؤوسه في نقطة مثل من مفروضة على ا ب
- ١٠ ارسم مربعا مساحته أصغر ما يمكن داخل مربع آخر معلوم
- ١١ ارسم (أولا) دائرة خارج مستطيل معلوم
- (ثانيا) مربعا خارج مستطيل معلوم
- ١٢ ارسم (أولا) دائرة في ربع دائرة معلومة
- (ثانيا) مربعا في ربع دائرة معلومة



## في الدوائر والمضلعات المنتظمة

### عملية ٣٠

المعلوم دائرة المطلوب رسم مضلع منتظم داخلها وآخر خارجها



نحرض أن المسألة محلولة وأن  $ا ب ج د هـ و$  أضلاع متوالية للضلع المنتظم المطلوب رسمه داخل الدائرة  $م$

فاذا وصلنا أنصاف الأقطار  $ا م ب م ج م د م هـ م و م$  انخ كان كل من المثلثات  $ا م ب م ج م د م هـ م و م$  متساوي الساقين وكان كل منها ينطبق على الآخر تمام الانطباق

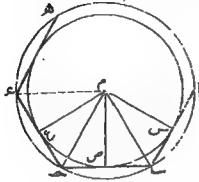
فاذا رمزنا بالرمز  $د$  لعدد أضلاع المضلع المنتظم فكل من الزوايا  $ا م ب م ج م د م هـ م و م$   $\frac{360}{د}$  (فأولاً) لرسم المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه  $د$  داخل الدائرة نرسم الزاوية المركزية  $ا م ب$  بمقدار  $\frac{360}{د}$  فالوتر  $ا ب$  المقابل لها هو أحد أضلاع المضلع ثم نركز في  $ا$  وفي  $ب$  ونصنف قطريساوي  $ا ب$  نقسم المحيط الى أقواس متساوية ونصل بين نقط التقسيم بمستقيمات فتكون كلها متساوية وكذلك الزوايا المحصورة بينها تكون متساوية (وثانياً) لرسم المضلع المنتظم الذي عدد أضلاعه  $د$  خارج الدائرة نعين أولاً النقط  $ا ب ج د هـ و$  انخ كما تقدم ويمد من كل منها مماس للدائرة فيحدث من تقاطع هذه المماسات شكل نسهل البرهنة على أن أضلاعه كلها متساوية وزواياه كذلك ويكون هو المضلع المطلوب تنبيه — لا يكون الرسم الهندسي بهذه الطريقة دقيقاً إلا اذا أمكن رسم الزاوية  $\frac{360}{د}$  بالمسطرة والبرجول

### تمارين

- المطلوب رسم المضلعات المنتظمة الآتية داخل دائرة معلومة ( نصف قطرها ٤ سنتيمترات )  
( أولاً ) المستدس ( ثانياً ) المثلث ( ثالثاً ) ذي الاثني عشر ضلعا
- ارسم خارج دائرة نصف قطرها ٣.٥ من السنتيمترات  
( أولاً ) مستدساً منتظلاً ( ثانياً ) مثلثاً منتظلاً
- ثم بين صحة الرسم بالقياس وحقق ذلك بالبرهان
- اذا رسم مثلث متساوي الأضلاع ومستدس منتظم داخل دائرة ورمز لضلع المثلث بالحرف  $ا$  وضلع المستدس بالحرف  $ب$  فاثبت أن ( أولاً ) مساحة المثلث  $= \frac{1}{4}$  مساحة المستدس ( ثانياً )  $ا^2 = 3 ب^2$
- ارسم مستدساً منتظلاً داخل دائرة نصف قطرها ٥ سنتيمترات باستعمال المنقلة واستخرج بالحساب مقدار إحدى زواياه وقسها وقس أحد الأضلاع

## عملية ٣١

المعلوم مضلع منتظم والمطلوب رسم دائرة داخله وأخرى خارجه



نفرض أن  $ا ب ك د ه و ز ح ط ي$  الخ

أضلاع متوالية من المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ١٥

ونصف الزاويتين  $ا ب ك$  و  $د ه و$  بالمستقيمين

$م ك$  و  $م د$  فيتقاطعان في  $م$

فتكون  $م$  هي مركز كل من الدائرتين الداخلة والخارجة

البرهان - نصل  $م د$  فمن المثلثين المتطابقين  $م ك د$  و  $م د ه$

نرى أن  $م د$  ينصف  $ك د$  ومنه يتضح أن جميع منصفات زوايا المضلع تقاطع في نقطة  $م$

واذن يمكن البرهنة على أن

$م ك = م د = م ه = م و = م ز = م ح = م ط = م ي = م$  الخ (نظرية ٦)

∴ النقطة  $م$  مركز الدائرة المرسومة خارج المضلع

ثم نزل من  $م$  الأعمدة  $م ك$  و  $م د$  و  $م ه$  و  $م و$  و  $م ز$  و  $م ح$  و  $م ط$  و  $م ي$  الخ

ونبرهن على أن  $م ك = م د = م ه = م و = م ز = م ح = م ط = م ي = م$  الخ

من المثلثات المتطابقة

فالنقطة  $م$  هي اذن مركز الدائرة المرسومة داخل المضلع

## تمارين

١ المطلوب رسم مستدس منتظم طول ضلعه ٤ سنتيمترات ورسم دائرة داخله وأخرى خارجه

وحساب طول كل من قطريهما وقياسه لأقرب مليمت

٢ أثبت أن مساحة المستدس المنتظم المرسوم داخل الدائرة تساوى ثلاثة أرباع مساحة المستدس

المنتظم المرسوم خارجها

ثم استخرج مساحة مستدس منتظم مرسوم داخل دائرة نصف قطرها ١٠ سنتيمترات لأقرب جزء من عشرة من السنتيمتر المربع

٣ اذا فرض أن  $ا ب ك$  مثلث متساوى الساقين مرسوم داخل دائرة وأن  $كلا$  من زاويتي

القاعدة  $ب ك$  و  $ك$  ضعف زاوية الرأس فأثبت أن  $ب ك$  يساوى ضلع الخمس المنتظم الذى يمكن

رسمه داخل هذه الدائرة

٤ ارسم بغير المنقلة

(أولاً) مستسا منتظلاً

(ثانياً) مثلاً منتظلاً

طول ضلع كل منهما ٤ سنتيمترات ووجد مساحة كل بالتقريب

### في محيط الدائرة

إذا قسمنا محيط أى دائرة وقسمنا قطرها وقسمنا طول الأول على طول الثانى وجدنا أن طول المحيط يشتمل على طول القطر  $\frac{1}{\pi}$  مرات تقريباً أى أن

$$\frac{\text{المحيط}}{\text{القطر}} = \frac{1}{\pi} \approx 3.14$$

ويمكن البرهنة على أن هذه النسبة ثابتة في جميع الدوائر

ويرمز لهذه النسبة عادة بالحرف  $\pi$  وهو مقدار غير جزئى أى لا يمكن إيجاده إلا على وجه التقريب وقد بحث بعض الرياضيين في تعيين مقدار عظيم جداً من أرقامه العشرية لكنهم وجدوا أن المقدار ٣,١٤١٦ قريب من الحقيقة وكاف في الأعمال وهو بسبعة أرقام عشرية (أى ٣,١٤١٥٩٢٦) أقرب إلى الحقيقة طبعاً

أما المقدار المتقدم  $\frac{1}{\pi} \approx 3.14$  فيساوى ٣,١٤٢٨ وهو أكبر من الحقيقة بكثير وفيه رقمان عشريان حقيقيان فقط

$$\text{ولما كان } \frac{\text{المحيط}}{\text{القطر}} = \pi \text{ فعلى فرض أن } \pi = \text{نصف القطر}$$

$$\text{نجد أن } \frac{\text{المحيط}}{2} = \pi \text{ ومن ذلك يحل أن}$$

$$\text{المحيط} = 2\pi$$

فاذا أريد معرفة طول محيط أى دائرة معلوم نصف قطرها نضع في المتساوية المذكورة بدل  $\pi$  مقداره وهو إما  $\frac{1}{\pi}$  أو ٣,١٤١٦ أو ٣,١٤١٥٩٢٦ على حسب درجة الدقة والقرب من الحقيقة المرادة في الناتج

تنبيه — لايسع المقام هنا الآن شرح الطرق النظرية التي بها يمكن تعيين مقدار  $\pi$  الى الدرجة القريبة من الحقيقة ولكن بعمل مثل التجربة الآتية يسهل تعيينه الى رقمين عشريين

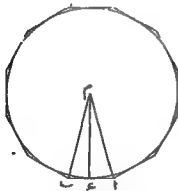
نطلب على أسطوانة قطعة من الورق مستطيلة الشكل بحيث ينطبق طرفاها كل على الآخر ثم نتقهما وبعد ذلك نزع الورقة ونسوحها ونقيس البعد بين التبيين فطوله يساوى طول المحيط ثم نقس القطر ونقسم الناتج الأول على الثانى فنخرج القسمة يمين مقدار  $\pi$

المحيط	القطر	مقدار ط
١٦ سنتيمترا	٥,١ من السنتيمترات	
٢٢,٣ من السنتيمترات	٧,١ » »	
٣٣,٨ » »	١٠,٨ » »	

مثال ١ - عين مقدار ط من كل  
من القروض المذكورة ثم أوجد  
متوسط النتائج الثلاثة

مثال ٢ - خيط طوله ٧٥,٤ من البوصات أمكن له ٢٠ مرة على أسطوانة قطرها ١,٢ من البوصات  
مامقدار ط باعتبار أن كل لفة تساوي محيط قاعدة الأسطوانة  
مثال ٣ - عجلة قطرها ٢٨ بوصة تدور ٤٠٠ دورة إذا قطعت مسافة ٩٧٧ ياردة مامقدار ط

في مساحة الدائرة .



إذا فرضنا أن  $ا$  أحد أضلاع المضلع الذي عدد أضلاعه  
المرسوم خارج الدائرة التي مركزها  $م$  ونصف قطرها  $س$

$$س \times ا \times \frac{1}{2} = \text{مساحة المضلع}$$

$$س \times ا \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$س \times ا \times \frac{1}{4} =$$

وهذا حقيقي مهما تضاعف عدد أضلاع المضلع

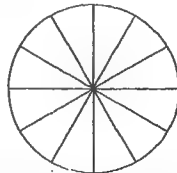
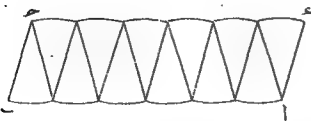
ونشاهد أنه كلما ضوعف عدد أضلاع المضلع أقرب محيطه من محيط الدائرة ومساحته من مساحتها  
أي أن الفرق بين المحيطين وكذلك الفرق بين المساحتين يأخذ في الصغر حتى إذا ضوعف عدد الأضلاع  
إلى مالا نهاية صغر هذا الفرق إلى أن يقرب من الصفر فيمكننا إذن أن نعتبر أن محيط الدائرة هو محيط  
المضلع المنتظم الذي ضوعف عدد أضلاعه إلى مالا نهاية ومساحتها مساحة المضلع المذكور

$$س \times ا \times \frac{1}{2} = \text{مساحة الدائرة}$$

$$س \times ا \times \frac{1}{2} =$$

$$س \times ا \times \frac{1}{2} =$$

طريقة أخرى لإيجاد مساحة الدائرة



إذا فرضنا أن البائرة منقسمة إلى عدد زوجي من القطاعات ذات الزوايا المركزية المتساوية ورمزنا  
لهذا العدد بالحرف  $د$  ووضعنا هذه القطاعات الواحد بجانب الآخر كما هو مبين في الشكل

يحدث أن مساحة الدائرة = مساحة الشكل  $ا ب ح$  و

وهذه المتساوية حقيقية مهما تضاعف عدد القطاعات

ويشاهد أنه كلما ضوعف عدد هذه القطاعات صغر كل قوس من أقواسها وعلى ذلك

(أولاً) يقترب كل من الخطين  $ا ب ح$  و  $ا ب ح$  المكونين من الأقواس قريباً كلياً الأول من المستقيم

$ا ب$  والثاني من المستقيم  $ح$  و

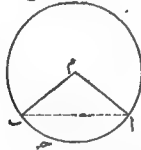
(ثانياً) تقترب كل من الزاويتين  $ب$  و  $ح$  من القائمة

أى أنه إذا ضوعفت  $ح$  الى ما لا نهاية تحول الشكل الى مستطيل قاعدته طول نصف محيط الدائرة وارتفاعه نصف قطرها

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = \frac{1}{2} \times \text{المحيط} \times \text{نصف القطر}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$$

مساحة القطاع



إذا كانت الزاوية المحصورة بين نصفي قطرين تساوى  $90^\circ$  فإن ضلعها يحصران

(أولاً) قوساً طوله  $\frac{1}{4}$  من المحيط

(ثانياً) قطاعاً مساحته  $= \frac{1}{4}$  من مساحة الدائرة

$\therefore$  إذا كانت الزاوية  $ا ب ح = 90^\circ$  من الدرجات يحدث

(أولاً) أن القوس  $ا ب = \frac{1}{4}$  من المحيط

(ثانياً) أن القطاع  $ا ب ح = \frac{1}{4}$  من مساحة الدائرة

$$= \frac{1}{4} \times \left( \frac{1}{2} \times \text{محيط الدائرة} \times \text{نصف القطر} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \text{القوس} ا ب \times \text{نصف القطر}$$

مساحة القطعة

لايجاد مساحة القطعة الصغرى نستخرج المثلث الذى أضلاعه وتر القطعة ونصفها فطرى الدائرة

ثم نطرح هذه المساحة من مساحة القطاع المشترك مع القطعة فى القوس فتكون مساحة القطعة

$$ا ب ح - ا ب ح$$

ولايجاد مساحة القطعة الكبرى نستخرج مساحة القطعة الصغرى كما تقدم ونطرح هذه المساحة

من مساحة الدائرة

## تمارين

( يراعى فى أخذ مقدار ط فى التمارين الآتية درجة التقريب المطلوبة فى الناتج )

- ١ المطلوب إيجاد طول محيطي دائرتين لأقرب مليمترا إذا كان نصف قطر أحدهما ٥ و٤ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ١٠٠ سنتيمتر
- ٢ أوجد لأقرب مليمترا مربع مساحة دائرتين نصف قطر إحداها ٨ و٥ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٢٦,٣ من السنتيمترات
- ٣ دائرة داخل مربع طول ضلعه ٣,٦ من السنتيمترات أوجد طول محيطها ومساحتها إلى رقمين عشريين
- ٤ مربع داخل دائرة نصف قطرها ٧ سنتيمترات أوجد الفرق بين مساحتهما لأقرب سنتيمتر مربع
- ٥ أوجد لأقرب مليمترا مربع مساحة السطح المحصور بين محيطي دائرتين متحدتي المركز نصف قطر إحداها ١١,٤ من السنتيمترات ونصف قطر الأخرى ٨,٦ من السنتيمترات
- ٦ بين أن مساحة السطح المحصور بين محيطي دائرتين متحدتي المركز تساوى مساحة دائرة نصف قطرها طول المماس الممدود من أى نقطة على محيط الدائرة الكبرى إلى الدائرة الصغرى
- ٧ مستطيل داخل دائرة قاعدته ٨ سنتيمترات وارتفاعه ٦ سنتيمترات أوجد مجموع مساحات القطع الأربع الخارجة عنه لأقرب عشر من السنتيمتر المربع
- ٨ ماطول ضلع المربع ( لأقرب عشر من البوصة ) الذى مساحته تساوى مساحة دائرة نصف قطرها ٥ بوصات
- ٩ مساحة السطح المحصور بين محيطي دائرتين متحدتي المركز ٢٢ سنتيمترا مربعا وعرضها سنتيمتر واحد ماطول نصفى القطرين فى الدائرتين بالتقريب مع العلم بأن  $\frac{22}{7} = \pi$
- ١٠ مالفارق لأقرب سنتيمتر مربع بين مساحة الدائرة المرسومة خارج مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٠ سنتيمترات وبين مساحة الدائرة المرسومة داخله
- ١١ ارسم على ورق المربعات دائرتين البعدان الاحداثيان لمركزيهما ( ٣ ٠ ) و ( ٠ ٦ ) ( ١,٦ ٠ ) من السنتيمترات ونصف قطر أولاهما ١,٤ من السنتيمترات ونصف قطر الثانية سنتيمتران ثم برهن على أن الدائرتين تتماسان وأوجهه بالتقريب محيط كل منهما ومساحته
- ١٢ ارسم دائرة نصف قطرها سنتيمتران والبعدان الاحداثيان لمركزها ( ٢,٤ ٠ ) من السنتيمترات ثم ارسم دائرتين أخريين مركز كل منهما نقطة الأصل ونصف قطر الأولى سنتيمتران ونصف قطر الثانية ٦ سنتيمترات وبرهن على أن كلا منهما تمس الدائرة الأولى

تمارين على الدوائر المرسومة داخل المثلث وخارجه والمماس له من الخارج

(مسائل نظرية)

١ ارسم دائرة تمس مستقيمين متوازيين ومستقيما آخر قاطعا لهما م بين أنه يمكن رسم دائرتين متساويتين في هذه الحالة

٢ اذا تساوى من مثلث قاعدته وزاوية رأسه نظيرتيهما من مثلث آخر كانت الدائرتان المرسومتان خارج المثلثين متساويتين

٣ ا ب ح مثلث كى مركز الدائرة المرسومة داخله ك مركز الدائرة المرسومة خارجه برهن على أنه لو كانت النقط كى كى ك على استقامة واحدة لكان  $ا = ب = ح$

٤ مجموع قطرى الدائرتين المرسومتين إحداهما داخل مثلث قائم الزاوية والأخرى خارجه يساوى مجموع ضلعي القائمة

٥ اذا كانت الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ح تمس أضلاعه فى د ك ه و فاق زوايا المثلث د ه و تساوى على الترتيب  $٩٠ - \frac{ا}{٢} - ٩٠ - \frac{ب}{٢} - ٩٠ - \frac{ح}{٢}$

٦ اذا فرضنا أن كى مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ح كى مركز الدائرة المحاسية للضلع ب ح وامتداد الضلعين الآخرين فانه يمكن أن يمر بالنقط كى ك ب كى ك ح محيط دائرة

٧ الفرق بين أى ضلعين من مثلث يساوى الفرق بين جزأى الضلع الثالث اللذين يتقسم بهما بنقطة تماس الدائرة الداخلة

٨ فى المثلث ا ب ح النقطة كى مركز الدائرة الداخلة كى مركز الدائرة الخارجة برهن على أن المستقيم كى ح تقابله زاوية رأسها فى ا تساوى نصف الفرق بين زاويتي القاعدة وبذا برهن على أنه اذا أنزل العمود ا د على ب ح كان اى منصفاً لزاوية د ا ح

٩ قطرا الشكل الرباعى ا ب ح د متقاطعان فى م برهن على أنه اذا وصل بين مراكز الدوائر المرسومة خارج المثلثات ا م ب ك م د ح م د ك م ا ب ح شكل متوازى الأضلاع

١٠ ا ب ح مثلث والنقطة كى مركز الدائرة الداخلة برهن على أنه اذا وصل اى و ب على استقامته حتى قطع محيط الدائرة المرسومة خارج المثلث فى م كانت هذه النقطة مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ب كى د

١١ المطلوب رسم المثلث المعلوم منه القاعدة والارتفاع ونصف قطر الدائرة المرسومة خارجه

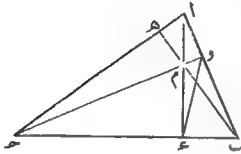
١٢ اذا تماس من الخارج ثلاث دوائر مراكزها ا ب ك متى فى د ك ه و كانت الدائرة الداخلة للمثلث ا ب ح هى عين الدائرة الخارجة للمثلث د ه و

## نظريات وأمثلة على الدوائر والمثلثات

### ملتقى ارتفاعات المثلث

١ الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الأضلاع المقابلة لها تتلاقى جميعا في نقطة واحدة

في  $\Delta ABC$  أنزلنا من الرأس  $A$  العمود  $AD$  على الضلع  $BC$  ومن  $B$  العمود  $BE$  على الضلع  $AC$  فيتلاقى هذان العمودان في  $M$



فأنا وصلنا  $B$  ومددناه على استقامته حتى قابل  $AD$  في  $H$  فانه يطلب البرهنة على أن  $BH$  عمود على  $AC$  لذلك فصل  $D$  و

فن حيث ان الزاويتين  $M$  و  $B$   $MD$  و  $B$  قائمتان

∴ النقط  $M$  و  $D$  و  $B$  و  $C$  يمر بها محيط دائرة واحد

∴  $\angle DBC = \angle DMC$  لأنهما في قطعة واحدة

$\angle DAC = \angle DMC$  للتعاقب بالرأس

ومن حيث ان الزاويتين  $A$  و  $C$   $AD$  و  $C$  قائمتان

∴ النقط  $A$  و  $D$  و  $C$  و  $B$  يمر بها محيط دائرة واحد

∴  $\angle DAC = \angle DBC$  لأنهما في قطعة واحدة

∴  $\angle DAC + \angle DMC = \angle DBC + \angle DMC$

$\angle DAC = \angle DBC$

∴ الزاوية الثالثة  $\angle DAC = \angle DBC$  (نظرية ١٦)

أي أن  $BH$  عمود على  $AC$

فالأعمدة  $AD$  و  $BE$  و  $CF$  و  $BH$  تتلاقى جميعا في النقطة  $M$  وهو المطلوب

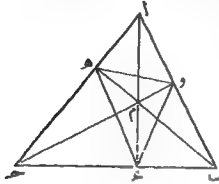
### تعريفات

(١) نقطة تلاقي الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث على أضلاعه تسمى ملتقى الارتفاعات

(٢) المثلث الحادث من وصل مواقع الارتفاعات يسمى مثلث المواقع



٢ الأعمدة النازلة من رؤوس المثلث الحاد الزوايا على الأضلاع المقابلة لها تصنف زوايا مثلث المواقع في المثلث الحاد الزوايا  $ا ب ج$  أنزلنا الأعمدة  $ا د ب ه ج و$  على الأضلاع من الرؤوس المقابلة لها فتقاطعت في  $م$  ثم وصلنا بين مواقع هذه الأعمدة بمستقيمت فحلت مثلث المواقع  $د ه و$  ويراد إثبات أن  $ا د ب ه ج و$  تصنف الزوايا  $د ه و$



البرهان — النقط  $م د ب ه ج و$  يمر بها محيط دائرة واحد كما تقدم في النظرية السابقة

$$\therefore د م و = د م ب \quad \text{لأنهما في قطعة واحدة}$$

وكذلك النقط  $م د ب ه ج و$  يمر بها محيط دائرة واحد

$$\therefore د م ه = د م ب \quad \text{لأنهما في قطعة واحدة}$$

لكن  $د م ب و = د م ب ه$  لأن كلا منهما تتم  $د ب ا$

$$\therefore د م و = د م ه$$

وبالطريقة عينها يبرهن على أن  $ب ه$  ينصف  $د ه$  و  $ج و$  ينصف  $د ه$  و  $د ه$  وهو المطلوب  
نتيجة ١ — كل ضلعين من مثلث المواقع متلاقين على ضلع من المثلث الأصلي يصنعان مع هذا الضلع زاويتين متساويتين

لأن الزاوية  $و د ب$  تتم  $د و م$

$$\therefore تتم د و م$$

لكن  $د ب ا ه$  تتم  $د ب و م$

$$\therefore د و م = د ب ا ه \quad \text{التي هي د ب ا ه}$$

وبالطريقة عينها يمكن إثبات أن  $د ه ه ج = د ب ا ه$

$$\therefore د و م = د ه ه ج = د ب ا ه$$

وبالطريقة عينها يمكن إثبات أن

$$د ه ه ج = د و ه ا = د ب$$

$$6 \quad د و م = د ه و ا = د ه$$

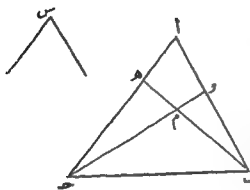
نتيجة ٢ — زوايا المثلثات  $د ب و$  و  $ا ه و$  و  $ا ه ج$  متساوية وتساوي زوايا المثلث  $ا ب ج$

تشبه — اذا كانت الزاوية  $ا ب ا$  مفرجة فان العمودين  $ب ه ج و$  ينصفان زاويتي مثلث المواقع الخارجيتين

## تمارين

- ١ م ملتيق الارتفاعات في المثلث  $ا ب ح$  مددنا العمود  $ا$  حتى قابل الدائرة المرسومة خارج المثلث في  $ح$  برهن على أن  $م س = ح$
- ٢ أضلاع المثلث الحاد الزوايا تنصف الزوايا الخارجة لمثلث المواقع أما المثلث المنفرج الزاوية فان ضلعي المنفرجة فيه ينصفان زاويتين داخليتين
- ٣ م ملتيق الارتفاعات في المثلث  $ا ب ح$  برهن على أن الزاويتين  $ب م ح$  و  $ا ب ح$  متكاملتان
- ٤ اذا كانت م ملتيق الارتفاعات في المثلث  $ا ب ح$  فان كلا من النقط الأربع  $م ا ب ح$  ملتيق الارتفاعات في المثلث الذي رؤوسه النقط الثلاث الأخرى
- ٥ كل من الدوائر الثلاث التي تمر برأسي مثلث وملتيق ارتفاعاته تساوي الدائرة الخارجة المارة برؤوسه
- ٦ النقطتان  $د ه$  مفروضتان على نصف محيط دائرة مرسوم على المستقيم  $ا ب$  فاذا وصلنا  $د ا ب$  و  $ه ب$  فقاطعا (هما أو امتدادهما) في  $ح$  ثم وصلنا  $ا ه ب$  و فقاطعا (هما أو امتدادهما) في  $و$  كان  $و ح$  عمودا على  $ا ب$
- ٧  $ا ب ح$  مثلث  $م$  ملتيق ارتفاعاته فاذا كان  $ا$  قطر الدائرة المارة برؤوسه كان  $ب م ح$  و متوازي الأضلاع
- ٨ اذا وصلنا بين ملتيق ارتفاعات المثلث وبين منتصف القاعدة بمستقيم ومددناه على استقامته حتى قابل الدائرة المرسومة على المثلث في نقطة كانت هذه النقطة منتهى القطر المار برأس المثلث
- ٩ اذا مددنا العمود النازل من رأس المثلث على قاعدته حتى قابل محيط الدائرة المارة برؤوسه في  $ل$  ثم وصلنا  $م$  ملتيق الارتفاعات الى منتصف القاعدة بمستقيم ومددناه على استقامته أيضا حتى قابل المحيط في  $د$  كان  $ل د$  موازيا للقاعدة
- ١٠ المستقيم الواصل من ملتيق الارتفاعات الى أي رأس في المثلث يساوي ضعف العمود النازل من مركز الدائرة المرسومة خارجه على الضلع المقابل لهذا الرأس
- ١١ اذا رسمنا ثلاث دوائر كل منها يمر بملتيق ارتفاعات مثلث ورأسين منه فان المثلث الحادث من توصيل مراكز هذه الدوائر يتطبق تمام الانطباق على المثلث الأصلي
- ١٢ ارسم المثلث المعلوم منه رأس وملتيق ارتفاعاته ومركز الدائرة المرسومة خارجه

٣ المطلوب إيجاد المحل الهندسي لمتقى ارتفاعات المثلث  
فرض أن  $B$  = القاعدة المعلومة  $\angle C$  زاوية الرأس  
فاذا فرضنا أن  $A$  = مثلث ما مرسوم على  $B$  =  
وزاوية رأسه  $A$  تساوى الزاوية المعلومة من  
وأنتزاع من  $C$  = العمودين  $B$  =  $D$  وفتقاطعا  
في  $M$  التي هي متقى الارتفاعات



ولكون  $\Delta$  اتساوي  $\Delta$  س دائما مهما تحركت النقطة افتقارها ثابت ومكملتها ثابتة كذلك أي أن قاعدة  $\Delta$  م  $\Delta$  معلومة وزاوية رأسه ثابتة المقدار

وأن منصفات زواياه أي ٦ ب ٦  
تقاطعت في النقطة ي مركز المائرة الباخلة

فانه يطلب إيجاد المحل الهندسي للنقطة

ومن  $\Delta$   $ab$  نحصل أن  $a + b + 1 = 12$

(۲) ... ..  $= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$  أي أن  
ويطرح (۲) من (۱)

ی -  $1\frac{1}{4}$  = ۱.۲۵

$$1\frac{1}{2} + u =$$

ولكون د ا ثابتة المقدار لأنها تساوى س دائما مهما تحركت النقطة ا

د ي ثابتة كذلك .:

فلحل الهندسى للنقطة ي اذن هو قوس القطعة التي وترها ب ه المعلوم والتي تحبل زاوية ثابتة مقدارها يساوى  $(\psi + \frac{1}{\phi})$  س

### تمارين على المحال الهندسية

١ مثلث معلوم منه القاعدة ب ه وزاوية الرأس ا والمطلوب إيجاد المحل الهندسى لمركز الدائرة التي تمس ضلع المثلث ب ه وامتداد الضلعين الآخرين

٢ ا ب مستقيم رسمنا من نهايته المستقيمين المتوازيين ا ل ب م والمطلوب إيجاد المحل الهندسى لنقطة تقاطع منصفى الزاويتين ب ا ل ا م ب

٣ دائرة يراد إيجاد المحل الهندسى لمتصفاتها أوتارها الماسة بنقطة واحدة سواء كانت هذه النقطة داخل الدائرة أو على محيطها أو خارجها

٤ ماهو المحل الهندسى لنقط تماس المماسات الممدودة من نقطة مفروضة الى جملة دوائر متحدة المركز  
٥ ماهو المحل الهندسى لنقطة تقاطع مستقيمين يمران بنقطتين معلومتين على محيط دائرة ويحصران بينهما من المحيط طولاً معلوماً

٦ ا ب نقطتان على محيط دائرة ل ه قطر فيها ماهو المحل الهندسى لنقطة تقاطع ل ا ب ه ب

٧ ا ب ه مثلث مرسوم على القاعدة المألومة ب ه وزاوية رأسه ثابتة المقدار مددا ب ا على استقامته الى ه بحيث يكون ب ه مساوياً مجموع ضلعي زاوية الرأس ماهو المحل الهندسى للنقطة ه

٨ ا ب وتر ثابت في دائرة ا ب ه وتر متحرك فيها ما ز بالنقطة ا فلذا اكملنا متوازي الأضلاع ب ه ه ا هو المحل الهندسى لنقطة تقاطع قطريه

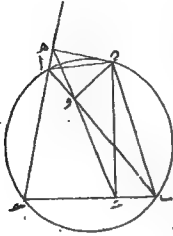
٩ ل ه مستقيم طرفاه على مستقيمين متعامدين يتحرك بينهما أمتنا من ل العمود ل س على أحد المستقيمين المتعامدين ومن ه العمود ه س على المستقيم العمودى الآخر فتقابل ل س ه س في نقطة س ماهو المحل الهندسى لهذه النقطة

١٠ دائرتان متقاطعتان في ا ب فرضنا على أحد المحيطين نقطة مثل ه ومددنا منها مستقيمين يمران بالنقطتين ا ب ويقابلان المحيط الآخر في س ه ص ثم وصلنا المستقيمين ا ص ب س فتقاطعا في نقطة أوجد محلها الهندسى

١١ دائرتان متقاطعتان في ا ب رسمنا مستقيماً ماراً بالنقطة ا وطرفه ه على أحد المحيطين ب ه على المحيط الثانى ثم رسمنا مستقيماً آخر ماراً بالنقطة ا أيضاً طرفه ل على المحيط الأول ب ه على الثانى أوجد المحل الهندسى لنقطة تقاطع ل ب ه س على فرض أن المستقيم ه ا ثابت لا يتحرك

### خط ممسوس

هـ مواقع الأعمدة النازلة على أضلاع المثلث من أى نقطة على محيط الدائرة المرسومة خارجه على استقامة واحدة



إذا كانت و النقطة المفروضة على محيط الدائرة المرسومة خارج  
 هـ ا ب ج د هـ و ز و الأعمدة النازلة منها على أضلاعه  
 فإنه يطلب إثبات أن النقط د و هـ و ز على استقامة واحدة .  
 لذلك نصل هـ و ز ثم نبين على أن و د و هـ  
 على استقامة واحدة فنصل و ا و ب  
 البرهان - من حيث أن كلا من الزاويتين و ا ب د هـ قائمة  
 ∴ النقط و د و هـ و ز يمر بها محيط دائرة واحد .

∴ د هـ = د ا هـ لأنها في قطعة واحدة

∴ د هـ و د ب تكمل د ا ب

ب د ب د ب تكمل د ا ب

لأن النقط ا ب د هـ و ز على محيط دائرة واحد

∴ د هـ = د ب د ب التي هي د ب د

ومن حيث أن كلا من الزاويتين و ب د هـ و ب د ب قائمة

∴ النقط و د و هـ و ز يمر بها محيط دائرة واحد

∴ د ب و د ب تكمل د ب د

∴ د هـ و د ب تكمل د ب د

∴ و د على استقامة و هـ

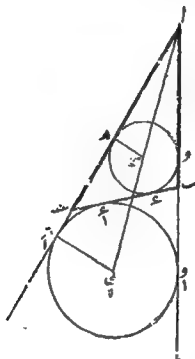
ملاحظة المستقيم و هـ يسمى مستقيم المواقع للنقطة و بالنسبة الى المثلث ا ب ج وهو المعروف بخط ممسوس

## تمارين

- ١ أنزلنا من نقطة  $\Delta$  على محيط دائرة مآزة برؤوس المثلث  $ab$  العمودين  $\Delta$  و  $\delta$  ه على الضلعين  $b$  و  $a$  ثم وصلنا  $\delta$  فإذا قطع هذا المستقيم أو امتداده الضلع  $a$  في  $\Delta$  وكان  $\Delta$  وعمودا على  $a$
- ٢ المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقطة التي تسير على شرط أن تكون مواقع الأعمدة النازلة منها على أضلاع مثلث معلوم على استقامة واحدة
- ٣  $a$  و  $b$  و  $c$  مثلثان متشابهان في زاوية الرأس  $a$  رسمنا دائرة مآزة برؤوس كل منهما فتقاطع المحيطان في  $\Delta$  برهن على أن مواقع الأعمدة النازلة من هذه النقط على الأضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$  على استقامة واحدة
- ٤ إذا رسمنا مثلثا داخل دائرة ووصلنا بمستقيم من ملتقى ارتفاعاته إلى نقطة ما مثل  $\Delta$  على المحيط كان مستقيم المواقع (خط ممسكون) لهذه النقطة منصفًا للمستقيم المذكور

### المثلث والدوائر المتعلقة به

٦ د هـ و نقط تماس الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ج د هـ و نقط تماس الدائرة الماسة ب ج و امتداد الضلعين الآخرين فاذا رمزنا لأضلاع المثلث بالرموز ا ب ج و بالرمز ح لنصف مجموع أضلاعه وبالرمز س لنصف قطر الدائرة الباطنة و س لنصف قطر الدائرة التي تماس ب ج و امتداد الضلعين الآخرين



فانه يراد اثبات ما يأتي

(أولاً) ان  $ا هـ = ا و = ا ج = ا - ح$

ب د = ب و = ب ج = ب - ح

ج د = ج هـ = ج و = ج - ح

(ثانياً) ان  $ا هـ = ا و = ا ج = ح$

(ثالثاً) ان  $ب د = ب هـ = ب و = د$

ج د = ج و = ج هـ = د - ح

(رابعاً) ان  $ب د = ب هـ = ب و = د$

(خامساً) ان  $ا هـ = ا و = ا ج = ا$

(سادساً) ان مساحة  $ا ب ج = س \times ح$

$( ١ - ح ) س =$

(سابعاً) بعد رسم الشكل المتكتم في حالا ما اذا كانت  $ب$  قائمة يبرهن على أن

$ب - ح = ب$

$ج - ح = ج$





١. برهن على أنه إذا كانت الدوائر التي مراكزها  $O_1, O_2, O_3, O_4$  جميعها تتمسك بـ  $C$  فانقطع  
 $O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, O_4O_1$  (الشكل في صفحة ٢٣٤) حلت

(أولاً) أن  $s = s_1 = s_2$

(ثانياً) أن  $s = s_1 = s_2 = s_3$

(ثالثاً) أن  $\psi_1, \psi_2 = \psi_1 + \psi_2$

(رابعاً) أن  $y = y_1 + y_2 = u + v$

٢ برهن على أن ملتقى ارتفاعات المثلث هو مركز الدائرة المرسومة داخل مثلث المواقع وأن كلا من رؤوس المثلث الأول مركز لدائرة تمس مثلث المواقع من الخارج

٣ معلوم من مثلث القاعدة وزاوية الرأس ويراد إيجاد المحل الهندسي لمركز الدائرة التي تمس هذه القاعدة وامتداد الضلعين الآخرين

٤ إذا علم من المثلث القاعدة وزاوية الرأس فمركز الدائرة المرسومة خارجه مارة برؤوسه ثابت

٥ معلوم من مثلث القاعدة ب ح وزاوية الرأس ا والمطلوب إيجاد الحل الهندسي لمركز الدائرة التي تمس ا ب وامتداد الضلعين الآخرين

٦. انشئ مثلثا معلوما منه القاعدة وزاوية الرأس ونقطة تماس الدائرة المرسومة داخله بالقاعدة

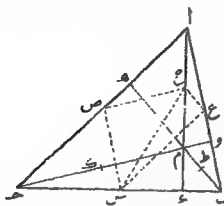
٧ أنشئ مثلثا معلوما منه القاعدة وزاوية الرأس والنقطة التي تمس فيها القاعدة (أو امتدادها) إحدى الدوائر المرسومة ماسة المثلث من الخارج

٨ اذا كانت  $y$  مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث  $6١$ ,  $6٢$ ,  $6٣$  مراكز الدوائر التي تمسه من الخارج كان محيط الدائرة المرسومة خارج المثلث منصفاً كلًا من  $y$ ,  $6٤$ ,  $6٥$ ,  $6٦$

٩ ا ب ح مثلث ٦ ٧ مركز الدائرة التي تمس ا ح وامتداد الضلعين الآخرين ٦ ٧  
مركز الدائرة التي تمس ا ب وامتداد الضلعين الآخرين برهن على أن النقط ب ٦ ح ٦ ٧ ٦ ٧ على  
محيط دائرة مركزها على محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ح

- ١٠ المطلوب رسم ثلاث دوائر معلومة مراكزها تتماس منى كم حلا لهذه المسألة
- ١١ المعلوم مراكز الدوائر الثلاث التي تمس مثلثا من الخارج والمطلوب إنشاء هذا المثلث
- ١٢ معلوم مركز الدائرة المرسومة داخل مثلث ومركزا دائرتين تتماسانه من الخارج ويراد إنشاء المثلث
- ١٣ المعلوم زاوية الرأس من مثلث ومحيطه ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله والمطلوب إنشاءه
- ١٤ المعلوم زاوية الرأس من مثلث ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله وطول العمود النازل من الرأس على القاعدة والمطلوب إنشاءه
- ١٥ ي مركز الدائرة المرسومة داخل  $\Delta$  ا ب ج برهن على أن مراكز الدوائر المارة برؤوس المثلثات ب ي ج ج ا ب ا ب تقع على محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث ا ب ج

٨ محيط الدائرة المسار بمقتضيات أضلاع المثلث يمر بمواقع ارتفاعاته وبمقتضيات الأبعاد المحصورة بين ملتقى الارتفاعات ورؤوس المثلث



فانه يطلب إثبات أن النقطة التسع س ك ص ك ع ك د ك ه ك و ك ح ك ط ك ك يمر بها جميعا محيط دائرة

لكن  $15 = 6 + 9$   $22 = 6 + 16$

وفي المثال ح ا ب لكون ح ص = ص ا 6 ح ص = ص ب

∴ ص من یوازی اب

ثم اذا مدح م على استقامته كان عمودا على ا ب

وعليه دس دس ح قائمة وكنك دس دس ح

∴ القطع من 6 ص 6 ح 6 ع يمر بها جميعا محيط دائرة واحد

أي أن  $c$  تقع على المحط المار بالنقطة  $s$   $6$  ص  $6$  ع  $6$  وأن  $s$   $c$  قطر لهذه الدائرة

وكذلك يمكن إثبات أن  $\tau \in \mathcal{K}$  كتمعان على هذا المحيط

ومن حيث ان د ح و س قائمة

∴ محيط الدائرة الذي قطرها من  $C$  يمر بالنقطة  $D$

وكذلك يمكن إثبات أن  $h \in \mathfrak{h}$  و تقعان على هذا المحيط

فالنقط من ص ح ع د ه و ط ك كلها على محيط دائرة واحد وهو المطلوب

ملاحظة - بناء على هذه الخلاصة تسمى الدائرة المارة بمتصفات أضلاع المثلث بدائرة النقط التسع ومن حيث ان هذه الدائرة تمر بؤوس مثلث المواقع يمكن استنتاج كثير من خواصها



$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ م} = 2 \text{ ر} \\ 2 \text{ م} = 6 \text{ م} \\ 2 \text{ م} = 6 \text{ م} \end{array} \right\} \text{من حيث ان}$$
$$25 = 1 \quad \therefore$$

∴ قطر دائرة التمسع يساوى نصف قطر الدائرة المرسومة خارج المثلث وهو المطلوب

لذلك فصل ا س فيقطع م س في ل  
ونرمز ح ف موازيا م س  
فقط ا م ل

6 ع ف یوازی م ل

یونی Δ س ح ف

6 د ل یوای ح ف

$$\therefore 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$$

ل ملتقى المستقيمت المتوسطة للثالث أ ب ح

(نتیجہ - ص ۱۰۲)

نقطة ملتقى المستقيمتين المتوسّطتين في المثلث والنقطة  $M$   $\in$   $BC$   $\Rightarrow$   $AD$  على امتداد  $BC$  واحد وهو المطلوب

## تمارين

- ١ المطلوب إيجاد المحل الهندسي لمركز دائرة النقط التسع اذا علم من المثلث قاعدته وزاوية رأسه
- ٢ دائرة النقط التسع للثلث  $ABC$  الذي ملحق ارتفاعاته  $M$  هي دائرة النقط التسع لكل من مثلثات  $AMB$   $CMB$   $AMC$
- ٣ اذا كانت  $Y$   $Y_1$   $Y_2$   $Y_3$  مراكز الدوائر الخمسة للثلث  $ABC$  من الداخل ومن الخارج فالدائرة المرسومة عليه هي دائرة النقط التسع لكل من المثلثات الأربعة الحادثة من توصيل أى ثلاث من النقط  $Y$   $Y_1$   $Y_2$   $Y_3$
- ٤ اذا مر محيط دائرة برؤوس جلة مثلثات وكانت متحدة في ملحق ارتفاعاتها انحلت كذلك في دائرة النقط التسع
- ٥ اذا علم من مثلث قاعدته وزاوية رأسه فبين أن احدى زاويا مثلث المواقع وأحد أضلاعه ثابتا المقدار دائما
- ٦ معلوم من مثلث قاعدته وزاوية رأسه ويراد إيجاد المحل الهندسي لمركز الدائرة التي تمر بمراكز الدوائر الثلاث الخمسة للثلث من الخارج

(الطبعة الخامسة: ج ٧٦٩، ج ٧٦٦، ص ١٩٢٤/١١٥٠)













0519717

Bibliotheca Alexandrina